Schnellübungen 5

Sie dürfen alle Hilfsmittel benutzen. Pro Aufgabe gibt es genau eine richtige Antwort.

Aufgabe 1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in I$. Was meinen Sie zu folgender Aussage: *Es existiert $\varepsilon > 0$ mit $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in I$.*

(a) Das ist wahr, weil $f(x) > 0$ gilt. Man könnte $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x)$ nehmen.
(b) Das ist im Allgemeinen falsch, aber wahr falls f gleichmässig stetig ist.
(c) Die Aussage ist immer falsch.
(d) Das ist im Allgemeinen falsch, aber wahr falls I ein kompaktes Intervall ist.

Aufgabe 2. Seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetige Funktionen. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

(a) Die Funktion $x \longmapsto f(x)g(x)$ ist gleichmässig stetig.
(b) Die Funktion $x \longmapsto f(x) + g(x)$ ist gleichmässig stetig.
(c) Die Funktion $x \longmapsto \max(f(x), g(x))$ ist gleichmässig stetig.
(d) Die Funktion $x \longmapsto 2x + f(x)$ ist gleichmässig stetig.

Aufgabe 3. Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen mit $a < b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$. Welche Aussage ist nicht äquivalent zu den anderen?

(a) $\sup A = \inf B$.
(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A, b \in B$ mit $b - a < \varepsilon$
(c) $\forall a \in A, b \in B\ \exists\, \varepsilon > 0$ mit $b - a < \varepsilon$
(d) $\exists! x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b\ \forall a \in A, b \in B$

Aufgabe 4. Sei $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = 0$ falls $x = \frac{1}{n}$ für eine ganze Zahl $n \neq 0$, und $f(x) = 1$ sonst. Falls f Riemann-integrierbar ist, berechnen Sie das Integral $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

(a) f ist nicht integrierbar. (b) $I = 0$ (c) $I = 1$ **(d)** $I = 2$

Aufgabe 5. Sei $A \subseteq [0, 1]$ eine Teilmenge. Ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ integrierbar?

(a) Nein, ausser wenn $A = \varnothing$ oder $A = [0, 1]$.
(b) Ja, falls A eine Vereinigung von kompakten Intervallen ist.
(c) Ja, aber nur falls A eine endliche Vereinigung von (beliebigen) Intervallen ist.
(d) Keine der Antworten (a), (b), (c) ist korrekt.