2.3.5 Das Auswahlaxiom und das Zorn'sche Lemma

Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Es existiert also für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ so dass $f(x) = y$ gilt, das heisst, für jedes $y \in Y$ ist die Menge

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

nicht leer. Das Auswahlaxiom garantiert, dass wir simultan für jedes Element $y \in Y$ ein Element $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ auswählen können. Mit anderen Worten: Es gibt eine Funktion $g : Y \to X$ so dass

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gilt. Das mag intuitiv plausibel erscheinen, kann aber erwiesenermassen nicht aus den Axiomen der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre abgeleitet werden. Man fügt das Auswahlaxiom deshalb als zusätzliches Postulat zu den Axiomen hinzu, um die bereits am Anfang von Abschnitt 2.3.1 erwähnte ZFC-Mengenlehre zu erhalten.

Auswahlaxiom (Variante 1)**:** *Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine surjektive Funktion. Dann existiert eine Funktion $g : Y \to X$ mit der Eigenschaft $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Die Funktion g in dieser Variante des Auswahlaxioms nennt man einen **Schnitt** von f. Eine oft benutzte Variante des Auswahlaxioms ist folgende:

Auswahlaxiom (Variante 2)**:** *Sei Y eine Menge, und $\mathcal{X}$ eine Familie von nichtleeren Teilmengen von Y. Dann gibt es eine Funktion $\alpha : \mathcal{X} \to Y$ mit der Eigenschaft dass $\alpha(X) \in X$ für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt.*

Die Funktion α in dieser Variante nennt man **Auswahlfunktion**, da sie der Auswahl eines Elementes $\alpha(X)$ in jeder der nichtleeren Mengen $X \in \mathcal{X}$ gleichkommt. Eine weitere Variante ist:

Auswahlaxiom (Variante 3)**:** *Sei $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Dann ist das Produkt*

$$\prod_{i \in I} X_i$$

nicht leer.

Übung 2.83. Überzeugen Sie sich, oder noch besser einen Mitstudenten, dass die drei Varianten des Auswahlaxioms tatsächlich alle äquivalent sind.

Eine weitere Variante des Auswahlaxioms ist das sogenannte *Zorn'sche Lemma*, benannt nach Max Zorn (1906–1993). Das Zorn'sche Lemma, nachfolgend Satz 2.87 ist eine Aussage über gewisse geordnete Mengen, und es ist überhaupt nicht klar dass diese Aussage äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Wir werden im Folgenden das Auswahlaxiom als eine wahre Aussage annehmen, und daraus das Zorn'sche Lemma ableiten.

Definition 2.84. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein Element $x \in X$ heisst **maximal** falls für alle $y \in X$ gilt: $x \leq y \implies x = y$.

Definition 2.85. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge, und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Element $x \in X$ heisst **obere Schranke** von A falls $a \leq x$ für alle $a \in A$ gilt. Ein Element $x \in X$ heisst **untere Schranke** von A falls $x \leq a$ für alle $a \in A$ gilt.

Definition 2.86. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heisst **Kette**, falls für alle $x, y \in K$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Wir sagen $(X, \leq)$ sei **induktiv** geordnet, falls jede Kette in X eine obere Schranke besitzt.

Man bemerke: Die leere Menge $\varnothing \subseteq X$ ist eine Kette. Ist $(X, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge, so hat $\varnothing$ eine obere Schranke, und also ist insbesondere X nicht leer. Jede endliche nichtleere geordnete Menge ist induktiv, da eine endliche Kette stets ein maximales Element enthält, das dann auch eine obere Schranke für diese Kette ist.

Theorem 2.87 (Zorn's Lemma). *Sei $(X, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge. Dann existiert ein maximles Element in X.*

Eine eng mit Zorn's Lemma verwandte Aussage ist das Hausdorff'sche Maximumsprinzip, nachstehender Satz 2.88, so benannt nach Felix Hausdorff (1868–1942). Wir leiten das Zorn'sche Lemma von diesem Satz ab.

Theorem 2.88 (Hausdorff'sches Maximumsprinzip). *Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Dann existiert eine maximale Kette in X. Das heisst, es existiert eine Kette $M \subseteq X$, so dass*

$$M \subseteq L \implies M = L$$

für jede Kette $L \subseteq X$ gilt.

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{X}$ die Menge aller Ketten in X. Wir Ordnen die Menge $\mathcal{X}$ durch die Inklusion. Sei K ein Element von $\mathcal{X}$, das heisst, eine Kette in X. Ist K nicht maximal, dann existiert eine Kette K' mit $K \subsetneq K'$ und ein Element $x_K \in K' \setminus K$. Wir wählen so ein Element x_K für jede nichtmaximale Kette $K \in \mathcal{X}$ und definieren

$$K^+ = \begin{cases} K \cup \{x_K\} \text{ falls } K \text{ nicht maximal ist} \\ K \text{ falls } K \text{ maximal ist.} \end{cases}$$

Hier haben wir das Auswahlaxiom benutzt. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass es eine Kette $K \in \mathcal{X}$ gibt die $K = K^+$ erfüllt. Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ eine Kette, so schreiben wir

$$\overline{\mathcal{K}} := \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \tag{2.6}$$

für die Vereinigung aller Mengen in $\mathcal{K}$. Wir bemerken dass $\overline{\mathcal{K}}$ eine obere Schranke für $\mathcal{K}$ ist: es gilt $K \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ für alle $K \in \mathcal{K}$.

Wir nennen eine Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{X}$ *abgeschlossen*, falls sie die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt.

(A1) $K \in \mathcal{N} \implies K^+ \in \mathcal{N}$

(A2) Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$ eine Kette, so gilt $\overline{\mathcal{K}} \in \mathcal{N}$

Abgeschlossene Mengen sind nicht leer, da wir (A2) insbesondere für $\mathcal{K} = \varnothing$ verlangen. Wir beobachten auch, dass der Durchschnitt einer beliebigen Familie von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{K}$ wiederum abgeschlossen ist. Insbesondere ist der Durchschnitt *aller* abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{K}$

$$\mathcal{M} = \bigcap\{\mathcal{N} \mid \mathcal{N} \subseteq \mathcal{X} \text{ ist abgeschlossen}\}$$

abgeschlossen. Diese Menge $\mathcal{M}$ ist eine minimale abgeschlossene Menge in $\mathcal{X}$: Für jede Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{X}$ gilt

$$(\mathcal{N} \text{ abgeschlossen}) \wedge (\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}) \quad \implies \quad \mathcal{N} = \mathcal{M}. \tag{2.7}$$

Der essentielle Teil des Beweises besteht nun darin folgende Behauptung zu zeigen:

Behauptung: *Die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ ist eine Kette.*

Wir müssen zeigen, dass zwei beliebige Elemente K und L von $\mathcal{M}$ miteinander vergleichbar sind, das heisst, dass $K \subseteq L$ oder $L \subseteq K$ gilt. Wir führen dazu die Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ ein, bestehend aus all denjenigen $K \in \mathcal{M}$ die mit allen anderen $L \in \mathcal{M}$ vergleichbar sind.

$$\mathcal{V} = \{K \in \mathcal{M} \mid \forall L \in \mathcal{M} : (L \subseteq K) \vee (K \subseteq L)\}$$

Die Behauptung dass $\mathcal{M}$ eine Kette ist ist gleichbedeutend mit der Behauptung dass $\mathcal{V} = \mathcal{M}$ gilt. Wir zeigen zwei Eigenschaften der Menge $\mathcal{V}$.

Lemma 2.89. *Für alle $K \in \mathcal{V}$ und $L \in \mathcal{M}$ gilt $(L \subsetneq K) \implies (L^+ \subseteq K)$.*

Beweis. Da K mit allen Elementen aus $\mathcal{M}$, und insbesondere mit L^+ vergleichbar ist, gilt $L^+ \subseteq K$ oder $K \subsetneq L^+$. In letzterem Fall erhalten wir strikte Inklusionen

$$L \subsetneq K \subsetneq L^+$$

was im Widerspruch dazu steht, dass L^+ höchstens ein Element mehr besitzt als L. □

Lemma 2.90. *Für alle $K \in \mathcal{V}$ und $L \in \mathcal{M}$ gilt $L \subseteq K$ oder $K^+ \subseteq L$.*

Beweis. Wir legen ein beliebiges $K \in \mathcal{V}$ fest, und betrachten die Teilmenge

$$\mathcal{N} := \{L \in \mathcal{M} \mid L \subseteq K \text{ oder } K^+ \subseteq L\}$$

von $\mathcal{M}$. Unser Ziel ist es die Gleichheit $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ zu zeigen. Aufgrund von (2.7) genügt es zu zeigen dass $\mathcal{N}$ abgeschlossen ist. Um nachzuweisen dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A1) erfüllt, wählen wir $L \in \mathcal{N}$. Es gilt $L \subsetneq K$ oder $L = K$ oder $L \supsetneq K^+$. Falls $L \subsetneq K$ gilt, so folgern wir aus Lemma 2.89 $L^+ \subseteq K$ und also $L^+ \in \mathcal{N}$. Falls $L = K$ oder $L \supsetneq K^+$ gilt, dann gilt auch $K^+ \subseteq L^+$ und also $L^+ \in \mathcal{N}$. Damit ist gezeigt dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A1) erfüllt. Um nachzuweisen dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt, wählen wir eine Kette $\mathcal{C}$ in $\mathcal{N}$. Da $\mathcal{C}$ auch eine Kette in $\mathcal{M}$ ist und $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist, gilt $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}$. Falls $C \subseteq K$ für jedes $C \in \mathcal{C}$ gilt, so gilt $\overline{\mathcal{C}} \subseteq K$ und damit $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{N}$. Andernfalls gibt es ein $C \in \mathcal{C}$ mit $C \subsetneq K$, also $K^+ \subseteq C$ und folglich $K^+ \subseteq C$ und damit $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{N}$. Damit ist gezeigt dass $\mathcal{N}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt. □

Wir kommen zurück zum Beweis der oben aufgestellten Behauptung. Wie wir bereits erklärt haben ist diese Behauptung gleichbedeutend mit der Aussage, dass $\mathcal{V} = \mathcal{M}$ gilt. Da $\mathcal{V}$ eine Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist, genügt es aufgrund von (2.7) zu zeigen, dass $\mathcal{V}$ abgeschlossen ist. Um nachzuweisen dass $\mathcal{V}$ die Eigenschaft (A1) erfüllt, wählen wir $K \in \mathcal{V}$. Für jedes $L \in \mathcal{M}$ gilt aufgrund von Lemma 2.90 $L \subseteq K \subseteq K^+$ oder $K^+ \subseteq L$. Also gilt $K^+ \in \mathcal{V}$, und $\mathcal{V}$ erfüllt (A1). Um nachzuweisen dass $\mathcal{V}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt, wählen wir eine Kette $\mathcal{C}$ in $\mathcal{V}$. Sei $K \in \mathcal{M}$. Falls $C \subseteq K$ für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt, so gilt $\overline{\mathcal{C}} \subseteq K$. Falls nicht, so gibt es ein $C \in \mathcal{C}$ mit $K \subseteq C$ und also $K \subseteq \overline{\mathcal{C}}$. In jedem Fall ist $\overline{\mathcal{C}}$ mit K vergleichbar, und da $K \in \mathcal{M}$ beliebig war, gilt $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{V}$. Damit ist gezeigt dass $\mathcal{V}$ die Eigenschaft (A2) erfüllt, und die Behauptung ist bewiesen.

Die Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ ist also eine Kette, und auch abgeschlossen. Wir schreiben $M = \overline{\mathcal{M}}$. Da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist gilt $M \in \mathcal{M}$ aufgrund von (A2), und hernach $M^+ \in \mathcal{M}$ aufgrund von (A1). Der Definition (2.6) zufolge gilt $K \subseteq M$ für alle $K \in \mathcal{M}$, und also insbesondere $M^+ \subseteq M$. Wir folgern dass $M = M^+$ gilt, das heisst, M ist eine maximale Kette in X. □

Beweis von Zorn's Lemma. Sei $(X, \leq)$ induktiv geordnet. Wir müssen zeigen dass ein maximales Element in X existiert. Aufgrund von Satz 2.88 (Hausdorff'sches Maximumsprinzip) existiert eine maximale Kette M in X. Da X nach Voraussetzung induktiv geordnet ist, gibt es eine obere Schranke x von M. Wir legen so eine maximale Kette M und eine obere Schranke x fest, und behaupten dass x ein maximales Element in X ist. Sei also $y \in X$ und $x \leq y$. Wir müssen zeigen dass $x = y$ gilt. Da x eine obere Schranke für M ist gilt $m \leq x \leq y$ für alle $m \in M$. Daraus folgt, dass $M \cup \{y\}$ eine Kette ist. Weil aber M eine maximale Kette ist, gilt $M = M \cup \{y\}$, das bedeutet, $y \in M$ und also $y \leq x$. Es folgt $x = y$. □