

Serie 2

Aufgabe 1

Es seien ψ_1, ψ_2 und ψ_3 Abbildungen von einer Menge E auf sich selbst. Zeigen Sie, dass die Assoziativität gilt: $(\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3 = \psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)$.

Aufgabe 2

- (i) Man konstruiere die Multiplikationstafel der Einheitsquaternionen $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.
- (ii) Man konstruiere die Multiplikationstafel der Diedergruppe $D_4 = \text{Sym}(P_4)$.
- (iii) Kann man die eine in die andere durch schlaue Symbolensubstitutionen umwandeln?

Aufgabe 3

Hilfssatz Z: Eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$ ist durch ihre Werte auf vier nicht-koplanaren Punkten vollständig festgelegt.

- (i) Bestimmen Sie alle Symmetrien des Tetraeders. Wie viele sind es?
- (ii) Wie viele "Arten" von Symmetrien besitzt das Tetraeder?

Aufgabe 4

Es sei P_n ein reguläres n -Eck und $D_n = \text{Sym}(P_n)$ dessen Symmetriegruppe, die n -te Diedergruppe.

- (i) Ein Paar (e, k) , wobei e eine Ecke und k eine angrenzende Kante von P_n ist, wird für diese Aufgabe *Finger* genannt. Man merkt, dass es bei je zwei Fingern von P_n stets eine Symmetrie von P_n gibt, die den ersten Finger auf den zweiten abbildet. Mithilfe des Fingergebriffs beweist man, dass $\#D_n = 2n$.
- (ii) Bei welchen n können alle Permutationen der Ecken von P_n durch Symmetrien von P_n realisiert werden? Berechnen und vergleichen Sie $\#D_n$ und die Anzahl der Permutationen der Eckmenge von P_n .

Aufgabe 5

Es sei E die Ebene $\mathbb{R}^2$ und ϕ eine Isometrie von E . Ein Punkt $P \in E$ heisst *Fixpunkt* von ϕ , falls $\phi(P) = P$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Isometrien der Ebene.

- (i) Es gibt keine Isometrie mit genau zwei Fixpunkten.
- (ii) Falls ϕ drei nicht-kollineare Fixpunkte hat, dann ist ϕ die Identität.
- (iii) Falls $\phi^3 = \text{id}$ gilt, dann hat ϕ einen Fixpunkt.
- (iv) Wenn ϕ einen Fixpunkt hat, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\phi^n = \text{id}$.