Serie 3

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe und X eine Teilmenge von G. Die *von X erzeugte Untergruppe von G* ist die kleinste Untergruppe von G, die X enthält. (Dass es eindeutig eine "kleinste" gibt, wird in der Vorlesung bewiesen.) Sei nun D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, $n \geq 2$.

(i) Zeigen Sie, dass D_n von zwei Spiegelungen erzeugt werden kann.

(ii) Zeigen Sie, dass D_n von einer Spiegelung und einer Drehung erzeugt werden kann.

(iii) Warum kann D_n nicht von einem einzelnen Element erzeugt werden?

Aufgabe 2

Sei $\mathrm{Sym}(W)$ die Symmetriegruppe des Würfels W.

(i) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elements von $\mathrm{Sym}(W)$.

(ii) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathrm{Sym}(W)$ der Ordnung 4. Wieviele "Arten" davon gibt es?

(iii) Welche Zahlen in $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ werden als Ordnung einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$ realisiert?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_n.

Aufgabe 4

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ aller Automorphismen von G eine Gruppe ist.

Aufgabe 5 — Wahr oder Falsch

Sei G eine Gruppe und $g, h \in G$.

(i) Aus $g^2 = h^2$ folgt $g = h$.

(ii) Es sei $n > 0$. Aus $h^n = 1$ folgt $(ghg^{-1})^n = 1$.

(iii) Für jedes $n > 1$ besitzt die Gleichung $h^n = g$ eine Lösung h in G.

(iv) Die Gleichung $g^{-1}xg = h$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

(v) Jede Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, die einen Fixpunkt besitzt, ist endlich.

Aufgabe 6*

Bestimmen Sie für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ die Anzahl der Untergruppen von $\mathrm{Sym}(W)$ der Ordnung k.