Serie 4

Aufgabe 1 — Wahr oder Falsch

Es sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ betrachten wir die Abbildungen

$$C_h, L_h : G \to G, \qquad C_h(g) = hgh^{-1}, \; L_h(g) = hg$$

genannt *Konjugation* beziehungsweise *Linksmultiplikation*. Welche der folgenden Aussagen treffen immer zu?

(i) C_h ist bijektiv.

(ii) C_h ist ein Isomorphismus.

(iii) L_h ist bijektiv.

(iv) L_h ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} C\colon G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ h &\longmapsto C_h, \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, wobei $C_h(g) := hgh^{-1}$.

Aufgabe 3 — Wahr oder Falsch

Es seien H und K Untergruppen von G. Welche von diesen Aussagen folgen?

(i) $H \cup K$ ist eine Untergruppe von G.

(ii) $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ ist eine Untergruppe von G.

(iii) $HK = KH$.

(iv) HK ist eine Untergruppe von G, falls $HK = KH$.

Aufgabe 4

Es seien G und H Gruppen. Das *direkte Produkt* von G und H ist die Gruppe bestehend aus der Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g, h) \circ (g', h') := (gg', hh') \qquad \text{für} \;\; (g, h), (g', h') \in G \times H.$$

(i) Ist S_3 isomorph zu $C_2 \times C_3$?

(ii) Ist C_4 isomorph zu $C_2 \times C_2$?

(iii) Ist C_6 isomorph zu $C_2 \times C_3$?

(iv) Beweisen Sie: $\mathrm{Sym}(W)$ ist isomorph zu $\mathrm{Sym}(T) \times C_2$.

Aufgabe 5

(i) Finden Sie zwei Untergruppen der Ordnung 4 in $\mathrm{Sym}(W)$, die isomorph aber nicht konjugiert sind.

(ii) Finden Sie eine Untergruppe der Ordnung 4 in $\mathrm{Sym}(T)$, die nur zu sich selbst konjugiert ist.

Aufgabe 6

Es seien T das Tetraeder und D das Dodekaeder. Finden Sie fünf konjugierte Untergruppen von $\mathrm{Sym}(D)$, die isomorph zu $\mathrm{Sym}^+(T)$, die orientierungserhaltenden Symmetrien von T, sind. (*Hinweis: betten Sie zehn Kopien von T in D ein.*)