Serie 5

Aufgabe 1 (Bilder und Urbilder)

Sei $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, $L \subseteq G$, $K \subseteq H$. Beweisen Sie:

(i) $L \leq G \Longrightarrow f(L) \leq H$.

(ii) $L \trianglelefteq G \not\Longrightarrow f(L) \trianglelefteq H$.

(iii) $K \leq H \Longrightarrow f^{-1}(K) \leq G$.

(iv) $K \trianglelefteq H \Longrightarrow f^{-1}(K) \trianglelefteq G$.

Aufgabe 2 (Untergruppen von Index 2)

Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe. Annahme: $G = H \cup aH$ mit $a \notin H$. Zeigen Sie (ohne Hilfssatz A):

(i) $G = H \cup aH$ ist eine Zerlegung von G, d.h. $H \cap aH = \emptyset$.

(ii) $|H| = |G|/2$, falls G endlich ist.

(iii) H ist normal in G.

(iv) Es existiert einen Homomorphismus $f\colon G \longrightarrow \{\pm 1\}$ mit $\ker(f) = H$.

Aufgabe 3 (Punktspiegelungen)

Sei Q die von allen Punktspiegelungen erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Seien P_x die Punktspiegelung an $x \in \mathbb{R}^2$, T_b die Verschiebung um $b \in \mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie alle Konjugationen ABA^{-1}, wobei $A, B \in \{T_a : a \in \mathbb{R}^2\} \cup \{P_x : x \in \mathbb{R}^2\}$.

(ii) Listen Sie alle Elementen von Q auf.

(iii) Zeigen Sie, dass die Verschiebungen eine normale Untergruppe von Q bilden.

(iv) Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Homomorphismus $Q \to C_2$ gibt.

Aufgabe 4 (Zentrum)

Sei G eine Gruppe. Ein Element von G heisst *zentral* falls es mit allen Elementen kommutiert. Die Menge $Z(G)$ aller zentralen Elementen heisst das *Zentrum* von G.

(i) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine normale Untergruppe von G ist.

(ii) Finden Sie das Zentrum der folgenden Gruppen (ohne Beweis):

- Die Einheitsquaternion $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ (Serie 2, Aufgabe 2),
- D_n,
- $\mathrm{Sym}(T)$, $\mathrm{Sym}(W)$, $\mathrm{Sym}(D)$, $\mathrm{Sym}(P)$ (Aufgabe 5 unten),
- $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$,
- Die invertierbare $n \times n$ reellen Matrizen $GL(n, \mathbb{R})$.
- Die invertierbare $n \times n$ komplexen Matrizen $GL(n, \mathbb{C})$.

Aufgabe 5 (Pyritoedergruppe T_h)

Sei P der markierte Würfel unten, wobei die Rückseiten die gleichen Streifen haben wie die Vorderseiten. Drücken Sie Sym(P) als Produkt einfacherer Gruppen aus.