ETH Zürich | D-MATH | Geometrie
Prof. Dr. Tom Ilmanen | Tommaso Goldhirsch | 30. November 2018

Serie 6

Aufgabe 1 (Orbittypen)

Sei $G \times X \longrightarrow X$ eine Gruppenoperation auf eine Menge X.

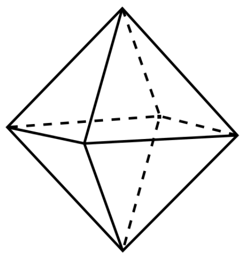
(i) Zeigen Sie: falls x, y im gleichen Orbit liegen, dann sind ihre Stabilisatoren G_x und G_y konjugiert.

(ii) Zeigen Sie: falls H und G_x konjugiert sind, dann ist H der Stabilisator eines Elements des Orbits von x.

Die Untergruppenkonjugationsklasse $C(x) := \{gG_xg^{-1} : g \in G\} = \{G_y : y \in G \cdot x\}$ nennt man den *Orbittyp* von $x \in X$. Alle Punkte eines Orbits haben den gleichen Orbittyp.

Aufgabe 2 (Orbittypen des Oktaeders)

Es bezeichne O das Oktaeder und $\mathrm{Sym}(O)$ seine Symmetriegruppe. Wir wollen alle Orbittypen der Operation von $\mathrm{Sym}(O)$ auf O bestimmen.



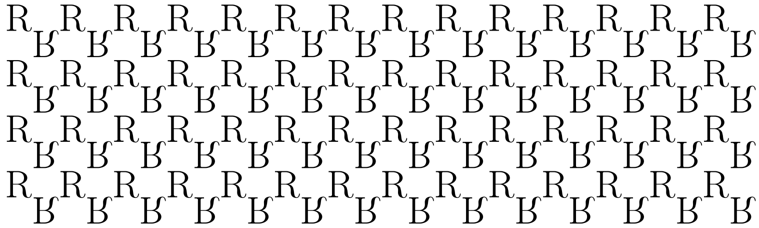
(i) Zeichnen Sie einen Orbit jeden Orbittyps. Wieviel sind es?

(ii) Beschreiben Sie den Stabilisator eines Punktes aus jedem Orbit in Teil (i).

(iii) Kommt jede Untergruppe von $\mathrm{Sym}(O)$ als Symmetriegruppe eines Punktes von O vor?

Aufgabe 3 (Gruppe der Kleinschen Flasche)

Sei $T_{(m,n)} \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2)$ die Translation der Ebene um den Vektor (m, n). Sei B die Gleitspiegelung $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Sei F die abgebildete Figur, die aus unendlich viel Wiederholungen des Buchstabens R besteht.



(i) Bestimmen Sie $K := \mathrm{Sym}(F)$.

(ii) Verifizieren Sie, dass die Operation von K auf $\mathbb{R}^2$ fixpunktfrei ist.

(iii) Ein *Fundamentalbereich* einer Gruppenoperation auf $\mathbb{R}^n$ is eine abgeschlossene Teilmenge W, die jede Bahn mindestens einmal trifft, aber deren Innere W° jede Bahn höchstens einmal trifft.

Finden Sie einen Fundamentalbereich der Operation von K auf $\mathbb{R}^2$.

(iv) Sei A einer Gruppe, X eine Teilmenge von A. Der *Normalisator* von X in A ist

$$N_A(X) \coloneqq \{h \in A \mid hXh^{-1} = X\},$$

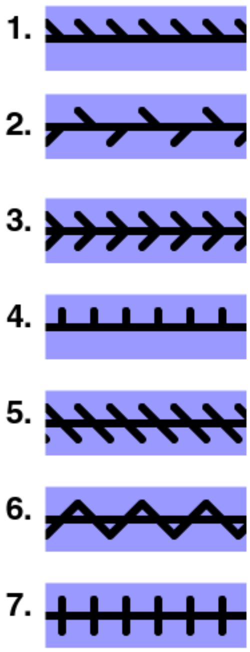
während der *Zentralisator* von X in A ist

$$Z_A(X) \coloneqq \{h \in A \mid hx = xh \text{ für alle } x \in X\}.$$

Beide sind Untergruppen von A. Aufgabe: Berechnen Sie $Z_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(K)$ und $N_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(K)$.

Aufgabe 4 (Friesgruppen)

Ein *Fries* ist eine Figur F in $\mathbb{R}^2$, sodass die Translationsgruppe $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Sym}(F)$ von F gleich $\mathbb{Z}$ ist. Die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(F)$ eines Frieses heisst *Friesgruppe*. Die sieben möglichen Friesgruppen sind durch die unten abgebildeten Friese $F_1, \ldots, F_7$ aufgewiesen.[1]



Bestimmen Sie eine Zahl $i \in \{1, \ldots, 6\}$ mittels Spielwürfel. Beschreiben Sie $\mathrm{Sym}(F_{i+1})$ mithilfe der mathematischen Wortschatz, der Ihnen zur Verfügung steht.

[1]Drawn by Wikipedia user AndrewKepert in Illustrator7, licensed under a CC BY-SA 3.0 license.