# Ferienserie

## Aufgabe 1

Sei $G$ eine Gruppe, $H$ und $K$ Untergruppen. Beweisen oder widerlegen Sie: falls $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, dann gilt $K \trianglelefteq G$.

## Aufgabe 2

Der Lagrangesche Satz lautet: Die Ordnung einer Untegruppe einer endlichen Gruppe teilt immer die Ordnung der Gruppe. Stimmt der Kehrsatz? Besitzt $G$ zu jedem Teiler $m$ der Ordnung von $G$ eine Untergruppe der Ordnung $m$?

## Aufgabe 3

(a) Berechne die Gruppe, die von den folgenden Permutationen erzeugt ist:

$$(12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(23).$$

(b) Inwiefern ist die alternierende Gruppe $A_n$ von Paaren disjunkter Vertauschungen erzeugt? Dass heisst, für welchen $n$ hat man

$$A_n = \langle (i\,j)(k\,\ell) \mid i, j, k, \ell \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } i, j, k, \ell \text{ verschieden} \rangle \text{ ?}$$

## Aufgabe 4

Sei $V_4$ die Kleinsche Vierergruppe, d.h. die Gruppe der Ordnung 4, die drei Involutionen enthält. Sei $C_4$ die zyklische Gruppe der Ordnung 4. Berechne $\mathrm{Aut}(V_4)$ und $\mathrm{Aut}(C_4)$.

## Aufgabe 5

Sei $H \leq G$. Welche sind äquivalent?

(i) $gHg^{-1} = H$ für alle $g$.

(ii) $gXg^{-1} = X$ für alle Linksklassen $X = aH$ von $H$ (wobei $a \in G$) und alle $g$.

(iii) $gH = Hg$ für alle $g$.

(iv) $H$ ist normal in $G$.

## Aufgabe 6

(a) Welche Gruppen der Ordnung 6 kommen vor als die Symmetriegruppe einer Figur im Raum?

(b) Welche Gruppen der Ordnung 8 kommen vor als die Symmetriegruppe einer Figur im Raum? Welche nicht?

## Aufgabe 7

Sei $D_n$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$. Die Eigenschaften von $D_n$ hängen von der Parität von $n$ stark ab.

(a) Wieviel Untergruppen der Index 2 hat $D_n$? (Der *Index* einer Untergruppe $H$ von $G$ ist die Anzahl Linksklassen $gH$ von $H$ in $G$.)

(b) Wieviel Konjugationsklassen von Involutionen hat $D_n$?

(c) Wieviel innere und äussere Automorphismen hat $D_n$?

(d) Sei $P$ ein reguläres $n$-Eck in der Ebene, sodass $D_n = \mathrm{Sym}(P)$. Sei $R$ eine Drehung um $\pi/n$ um den Mittelpunkt von $P$. Sei $P' = R(P)$.

Man merkt: $R \notin D_n$, $P' \neq P$, aber $D_n = \mathrm{Sym}(P) = \mathrm{Sym}(P')$. Die Antworten zu (a),(b),(c) lassen sich geometrisch mithilfe der Konjugationswirkung von $R$ gut erklären.

## Aufgabe 8

Sei $D_\infty := \mathrm{Sym}(F)$, wobei $F = \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ als Figur in $\mathbb{R}$ betrachtet wird. Man nennt $D_\infty$ die *unendliche Diedergruppe*. Zeigen Sie, dass $D_\infty$ von zwei Elementen $a$ und $b$, die die Beziehungen $a^2 = \mathrm{id}$ und $aba^{-1} = b^{-1}$ erfüllen, erzeugt werden kann.

## Aufgabe 9

Sei $\rho\colon \mathrm{Sym}(W) \longrightarrow S_3 = \mathrm{Per}(X, Y, Z)$ die Operation der Würfelgruppe auf die drei Koordinatenachsen $X, Y, Z$, wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $\ker \rho$ die 8-elementige normale Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$ (erzeugt von 3 Ebenenspiegelungen) ist.

## Aufgabe 10

Es bezeichne $O$ den Oktaeder und $\mathrm{Sym}(O)$ seine Symmetriegruppe.

(a) Bestimmen Sie alle Orbittypen der Operation von $\mathrm{Sym}(O)$ auf $O$. Zeichnen Sie einen Orbit jedes Orbittyps.

(b) Bestimmen Sie den Stabilisator eines Punktes aus jedem Orbit in Teil (a).

(c) Gibt es eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(O)$, die als Stabilisator eines Punktes von $W$ nicht vorkommt?

## Aufgabe 11

Finden Sie alle normalen Untergruppen von $\mathrm{Sym}_+(W)$ bzw. $\mathrm{Sym}_+(I)$.

## Aufgabe 12

Finden Sie ein äusseres Automorphismus von $\mathrm{Sym}(W)$ bzw. $\mathrm{Sym}(I)$.

## Aufgabe 13

Bestimmen Sie die Symmetriegruppe der folgenden Figuren. Welche sind konjugiert innerhalb $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$? Welche sind isomorph?

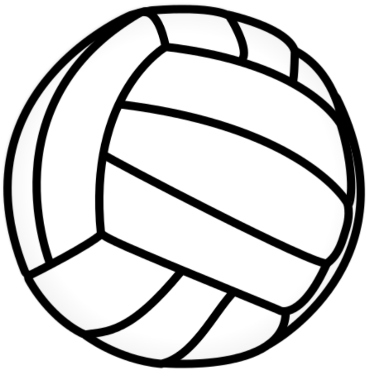

Figure 1: Volleyball

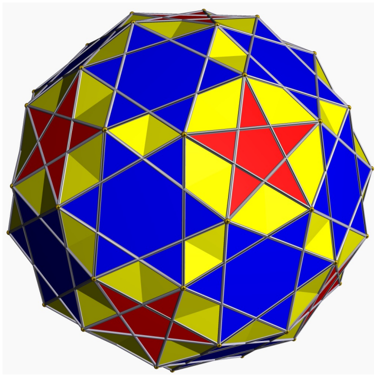

Figure 2: Kleines Snub-Ikosikosidodekaeder

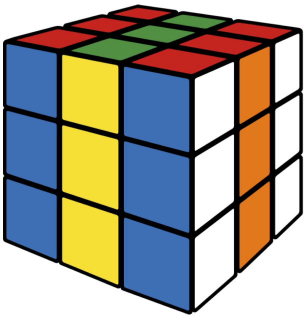

Figure 3: Rubik-Würfel

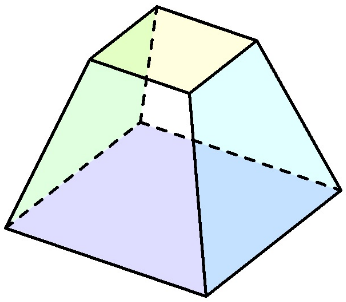

Figure 4: Pyramidenstumpf (Engisch: frustum)

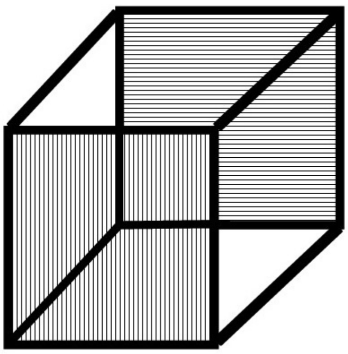

Figure 5: Würfel mit Linien

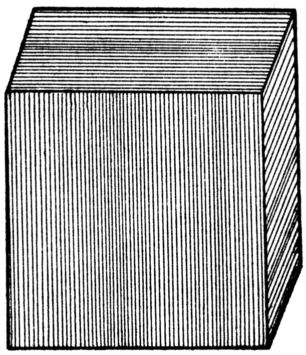

Figure 6: Pyritoeder

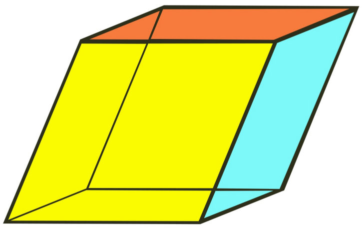

Figure 7: Rhomboeder

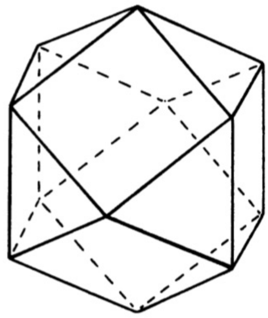

Figure 8: Kuboktaeder

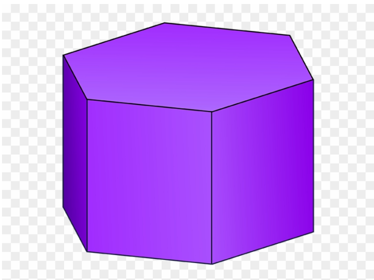

Figure 9: Reguläres sechseitiges Prisma

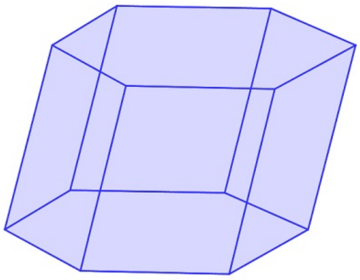

Figure 10: Schiefes sechsseitiges Prisma

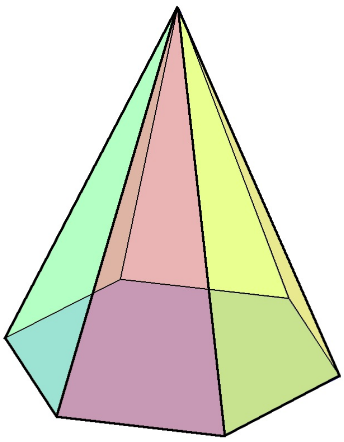

Figure 11: Reguläre sechsseitige Pyramide

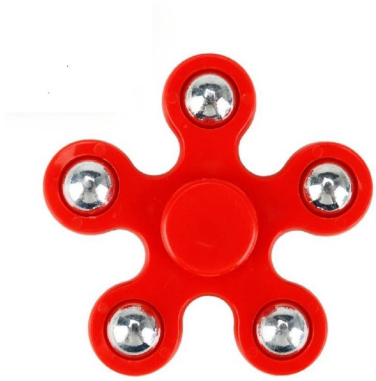

Figure 12: Fünfeckiges Fidget-Spinner

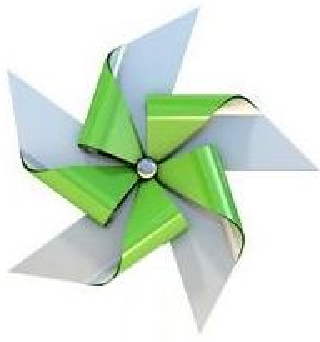

Figure 13: Fünfspitziges Windrädchen

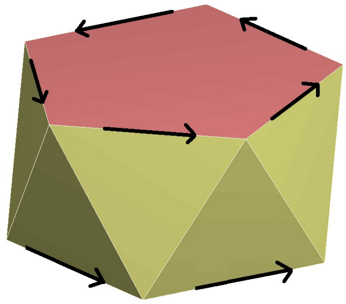

Figure 14: Fünfeckiges Antiprisma mit Pfeilen

## References

Bilder:

**Fig. 1**: Volleyball icon created by Arthur Shlain, shared under a CC-BY 3.0 agreement.

**Fig. 2**: From the Open Clip Art LIbrary, it's in the public domain.

**Fig. 3**: Retrieved from `http://icon-park.com/icon/rubiks-cube-stripe2-vector-icon/`, it's in the public domain.

**Fig. 4**: From *Building Collaborative Knowing: Elements of a Social Theory of Learning" In J*, Gerry Stahl, 01,2004.

**Fig. 5**: Retrieved from Wikipedia, created with Robert Webb's Stella software (`http://www.software3d.com/Stella.php`).

**Fig. 6**: George Huntington Williams, *Elements of Crystallography for Students of Chemistry, Physics, and Mineralogy* (New York, NY: Henry Holt and Company, 1892) (retrieved from `https://etc.usf.edu/clipart`).

**Fig 7.** Retrieved from `https://en.wikipedia.org/wiki/Associahedron` and created by the user Nilesj. It's in the public domain.

**Fig 8.** Retrieved from `https://en.wikipedia.org/wiki/Associahedron` and created by the user Nilesj. It's in the public domain.