Serie 2

Aufgabe 1

Es seien ψ_1, ψ_2 und ψ_3 Abbildungen von einer Menge E auf sich selbst. Zeigen Sie, dass die Assoziativität gilt: $(\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3 = \psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)$.

Lösung

Wir zeigen, dass die Abbildungen $(\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3$ und $\psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)$ auf allen Punkten $x \in E$ übereinstimmen und damit gleich sind. Es gilt in der Tat:

$$((\psi_1 \circ \psi_2) \circ \psi_3)(x) = (\psi_1 \circ \psi_2)(\psi_3(x)) = \psi_1(\psi_2(\psi_3(x))),$$

$$\psi_1 \circ (\psi_2 \circ \psi_3)(x) = \psi_1((\psi_2 \circ \psi_3)(x)) = \psi_1(\psi_2(\psi_3(x))).$$

Man bezeichnet dies als Assoziativität *der Verknüpfung von Abbildungen.*

Aufgabe 2

(i) Man konstruire die Multiplikationstafel der Einheitsquaternionen $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

(ii) Man konstruire die Multiplikationstafel der Diedergruppe $D_4 = \mathrm{Sym}(P_4)$.

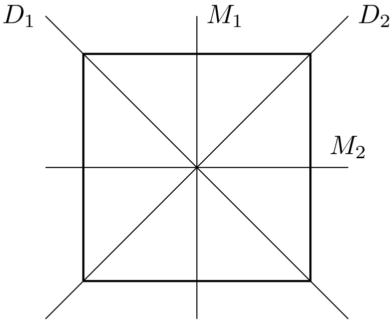
(iii) Kann man die eine in die andere durch schlaue Symbolensubstitutionen umwandeln?

Lösung

(i) Aus $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ kann man die ganze Multiplikationstafel der Quaternionen ausfüllen:

$\circ$	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

(ii) Seien $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ die Drehungen um O von $0°, 90°, 180°$ und $270°$ (in Gegenuhrzeigersinn). Seien $\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2$ die Spiegelungen durch M_1, M_2, D_1 und D_2.



Dann sieht die Multiplikationstafel so aus:

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_1	δ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

(iii) Nein. D_4 enthält fünf Elemente $g \neq \text{id}$ sodass $g^2 = \text{id}$, nämlich ρ_2, μ_1, μ_2, δ_1 und δ_2; die Quaternionengruppe entählt nur ein Element $g \neq \text{id}$ sodass $g^2 = \text{id}$, nämlich -1.

Die Ordnung *eines Gruppenelementes g einer Gruppe $(G, \circ)$ ist die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, für die $g^n = e$ gilt, wobei e das neutrale Element der Gruppe ist. Die Quaternionen enthalten ein Element der Ordnung 2 und D_4 enthählt fünf Elemente der Ordunung 2.*

Aufgabe 3

Hilfssatz Z: Eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$ ist durch ihre Werte auf vier nicht-koplanaren Punkten vollständig festgelegt.

(i) Bestimmen Sie alle Symmetrien des Tetraeders. Wie viele sind es?

(ii) Wie viele "Arten" von Symmetrien besitzt das Tetraeder?

Lösung

(i) Eine Symmetrie des Tetraeders ist durch ihr Bild auf den vier nicht-koplanaren Eckpunkten eindeutig bestimmt. Wir zeigen, dass jede Permutation der Eckpunkte durch eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$, die das Tetraeder erhält, realisiert werden kann. Die Symmetriegruppe des Tetraeders ist dann von der Ordnung $4! = 24$.

Wir erkennen zunächst für jeden der vier Eckpunkte eine Drehachse, die durch den jeweiligen Eckpunkt und den Schwerpunkt der gegenüber liegenden Seite verläuft. Außerdem verläuft eine Drehachse durch je zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte. Aus den genannten Drehachsen ergeben sich $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1$ Drehungen, sowie die Identität, also insgesamt 12 Permutationen.

Betrachte nun noch die Symmetriebene, die durch eine gegebene der sechs Kanten und senkrecht zur gegenüberliegenden Kante verläuft. Durch Verknüpfung der Drehungen mit diesen Ebenenspiegelungen erhält man auf nicht eindeutige Weise alle restlichen Permutationen der Eckpunkte.

(ii) Es treten offenbar die Identität, Drehungen, Ebenenspiegelungen und Verknüpfungen derselben, sogenannte Drehspiegelungen auf.

Aufgabe 4

Es sei P_n ein reguläres n-Eck und $D_n = \mathrm{Sym}(P_n)$ dessen Symmetriegruppe, die n-te *Diedergruppe*.

(i) Ein Paar (e, k), wobei e eine Ecke und k eine angrenzende Kante von P_n ist, wird für diese Aufgabe *Finger* genannt. Man merkt, dass es bei je zwei Fingern von P_n stets eine Symmetrie von P_n gibt, die den ersten Finger auf den zweiten abbildet. Mithilfe des Fingergebriffs beweist man, dass $\#D_n = 2n$.

(ii) Bei welchen n können alle Permutationen der Ecken von P_n durch Symmetrien von P_n realisiert werden? Berechnen und vergleichen Sie $\#D_n$ und die Anzahl der Permutationen der Eckmenge von P_n.

Lösung

(i) Wir fixieren einen Finger $(e_0, k_0) \in T_n$. Es sei $(e, k) \in T_n$ einer beliebiger Finger. Wir werden eine Symmetrie $g \in D_n$ konstruiren, sodass $g(e_0) = e$ und $g(k_0) = k$.

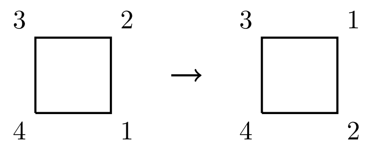
Eine geeignete Drehung $g_1 \in D_n$ bildet e_0 auf e ab. Dann ist $g_1(k_0)$ eine an e angrenzende Kante. Falls bereits $g_1(k_0) = k$ so können wir $g := g_1$ definieren. Andernfalls verknüpfen wir g_1 mit der Spiegelung g_2 entlang der Achse durch e und den Schwerpunkt des n-Ecks. Dann erfüllt $g := g_2 \circ g_1$ die Behauptung. g ist eindeutig durch Hilfssatz Z bestimmt. Konkret: für jeden Finger $(e, k) \in T_n$ es existiert genau eine Symmetrie $g \in D_n$ sodass $g(e_0, k_0) = (e, k)$, also $\#T_n \leq \#D_n$.

Jede Isometrie des regulären n-Ecks muss den Schwerpunkt, damit Ecken und damit Kanten erhalten. Insbesondere bildet sie Finger auf Finger ab und ist durch das Bild von (e_0, k_0) (und dem Schwerpunkt von P_n) eindeutig bestimmt. Also $\#D_n \leq \#T_n$.

Insgesamt haben wir bewiesen, dass $\#D_n = \#T_n = 2n$ gilt.

(ii) Die Anzahl der Permutationen der n-elementigen Menge der Eckpunkte beträgt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ aber für $n \geq 4$ ist $n!$ zunehmend größer als $2n = \#D_n$. Also für $n \geq 4$ gibt es Permutationen der Ecken die nicht von Symmetrien von P_n realisiert werden.

Z.B. für $n = 4$ wird die folgende Permutation nicht von einer Symmetrie realisiert:



Aufgabe 5

Es sei E die Ebene $\mathbb{R}^2$ und ϕ eine Isometrie von E. Ein Punkt $P \in E$ heisst *Fixpunkt* von ϕ, falls $\phi(P) = P$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über Isometrien der Ebene.

(i) Es gibt keine Isometrie mit genau zwei Fixpunkten.

(ii) Falls ϕ drei nicht-kollineare Fixpunkte hat, dann ist ϕ die Identität.

(iii) Falls $\phi^3 = \mathrm{id}$ gilt, dann hat ϕ einen Fixpunkt.

(iv) Wenn ϕ einen Fixpunkt hat, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\phi^n = \mathrm{id}$.

Lösung

(i) Wahr. Es sei $\phi : E \to E$ eine Isometrie mit zwei Fixpunkten $A \neq B$. Betrachte den Mittelpunkt M der Strecke AB. Da ϕ abstandserhaltend ist, muss $\phi(M)$ sowohl auf dem Kreis mit Radius $d(A, M)$ um A und dem Kreis mit Radius $d(B, M)$ um B liegen. Da $d(A, M) = d(B, M)$ per Definition des Mittelpunkts schneiden sich diese Kreise genau in M. Wir folgern also $\phi(M) = M$ und damit die Behauptung.

(ii) Wahr. Gemäß Vorlesung ist eine Isometrie der Ebene durch ihre Bilder auf drei nicht-kollinearen Punkten bestimmt. Da ϕ und die Identität $\mathrm{id} : E \to E$ auf den drei nicht-kollinearen Fixpunkten von ϕ übereinstimmen, folgt $\phi = \mathrm{id}$ und damit die Behauptung.

(iii) Wahr. Wir zeigen, dass die Aussage gilt. Dies ist offenbar der Fall, wenn $\phi = \mathrm{id}$. Wir können für den Rest des Beweises also annehmen, dass $\phi \neq \mathrm{id}$. Dann gibt es einen Punkt $P \in E$ mit $\phi(P) \neq P$. Betrachte die Punktmenge $\{P, \phi(P), \phi^2(P)\}$. Da ϕ eine Isometrie ist, gilt

$$d(P, \phi(P)) = d(\phi(P), \phi^2(P)) = d(\phi^2(P), \phi^3(P)).$$

Da $\phi^3 = \mathrm{id}$ per Voraussetzung, gilt auch $d(\phi^2(P), \phi^3(P)) = d(\phi^2(P), P)$. Insgesamt bilden die Punkte $\{P, \phi(P), \phi^2(P)\}$ also ein gleichseitiges Dreieck. Es bezeichne S den Schwerpunkt dieses Dreiecks, also den Punkt $S \in E$, der eindeutig durch die Anforderungen

$$d(S, P) = d(S, \phi(P)) = d(S, \phi^2(P))$$

bestimmt ist. Anwenden der Isometrie ϕ liefert nun

$$d(\phi(S), \phi(P)) = d(\phi(S), \phi^2(P)) = d(\phi(S), \phi^3(P)) = d(\phi(S), P)$$

Damit folgt $\phi(S) = S$ aus der Definition von S.

(iv) Falsch. Es sei ϕ die Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel $2\pi r$, wobei $r \in (0,1)$ eine irrationale Zahl sei. Dann fixiert ϕ den Ursprung und für $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ^n die Drehung um den Ursprung um den Winkel $2\pi rn$. Da $r \in (0,1)$ irrational ist, ist es auch $rn \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist rn für kein $n \in \mathbb{N}$ ganzzahlig und die Behauptung somit widerlegt.