Serie 3

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe und X eine Teilmenge von G. Die *von X erzeugte Untergruppe von G* ist die kleinste Untergruppe von G, die X enthält. (Dass es eindeutig eine "kleinste" gibt, wird in der Vorlesung bewiesen.) Sei nun D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, $n \geq 2$.

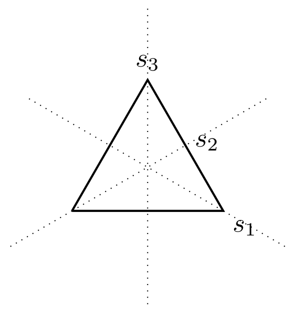
(i) Zeigen Sie, dass D_n von zwei Spiegelungen erzeugt werden kann.

(ii) Zeigen Sie, dass D_n von einer Spiegelung und einer Drehung erzeugt werden kann.

(iii) Warum kann D_n nicht von einem einzelnen Element erzeugt werden?

Lösung

Die Diedergruppe D_n besteht aus der Identität sowie $n-1$ Drehungen und n Spiegelungen. Wir schreiben $D_n = \{r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n\}$, wobei r_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) die Drehung um den Schwerpunkt um den Winkel $2\pi k/n$ bezeichnet. Insbesondere ist r_n die Identität. Die Spiegelungen s_k seien so gewählt, dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ die Achse von s_k mit der von s_{k+1} einen positiven Winkel von $2\pi/2n$ bildet.



(i) Betrachte die aufeinanderfolgenden Spiegelungen s_1 und s_2, deren Achsen den positiven Winkel $2\pi/2n$ einschließen. Dann gilt $s_2 \circ s_1 = r_1$. Die von s_1 und s_2 erzeugte Untergruppe von D_n enthält damit alle Drehungen $r_k = r_1^k$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$). Da außerdem $s_{k+2} = r_1 s_k r_1^{-1}$ gilt, erhalten wir iterativ alle Spiegelungen.

(ii) Wir wählen r_1 und s_1. Wie oben enthält die von r_1 und s_1 erzeugte Untergruppe von D_n alle Drehungen $r_k = r_1^k$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) sowie die Spiegelungen mit ungeradem Index. Da außerdem $s_2 = s_1 \circ r_{n-1}$, erhalten wir ebenfalls alle Spiegelungen mit geradem Index.

(iii) Es sei g ein Element von D_n. Wenn g die Identität ist, so erzeugt g die triviale Untergruppe. Falls g eine nicht-triviale Drehung ist, so erzeugt g eine Untergruppe der Gruppe der Drehungen. Schließlich, wenn g eine Spiegelung ist, so erzeugt g die Untergruppe $\{\mathrm{id}, g\}$. In keinem Fall stimmt die von g erzeugte Untergruppe mit ganz D_n überein.

Aufgabe 2

Sei Sym(W) die Symmetriegruppe des Würfels W.

(i) Bestimmen Sie die Ordnung jedes Elements von Sym(W).

(ii) Bestimmen Sie alle Untergruppen von Sym(W) der Ordnung 4. Wieviele "Arten" davon gibt es?

(iii) Welche Zahlen in $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ werden als Ordnung einer Untergruppe von Sym(W) realisiert?

Lösung

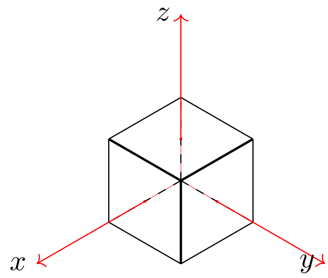
(i) Die Identität hat Ordnung 1. Wie schon in der Vorlesung gezeigt, gibt es 19 Symmetrien der Ordnung 2 in Sym(W):

- 3 180°-Drehungen um die Koordinatenachsen,
- 6 180°-Drehungen um die Geraden, die durch den Schwerpunkt und zwei gegenüberliegende Kanten verlaufen,
- 3 Spiegelungen and den Koordinatenebenen,
- 6 Spiegelungen and den Ebenen, die den Schwerpunkt und zwei gegenüberliegende Kanten enthalten,
- 1 Punktspiegelung am Ursprung.

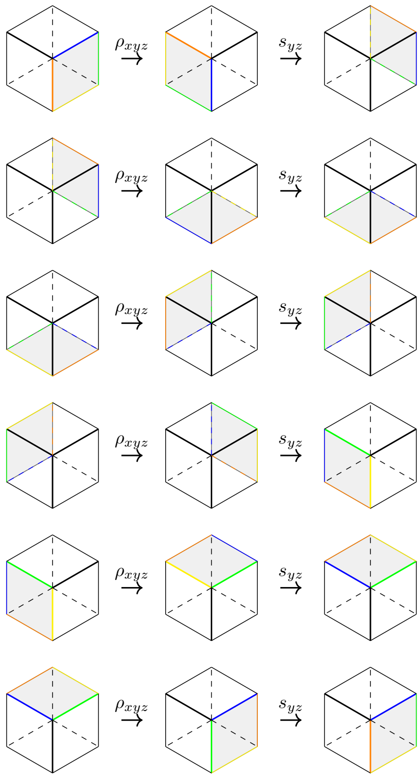
Für jede Gerade die durch zwei gegenüberliegende Ecken verläuft gibt es eine 120°-Drehung und eine 240°-Drehung die W erhalten, also insgesamt 8 Elementen der Ordnung 3.

Man kann Elementen der Ordnung 4 vie folgt beschreiben: für jede Achse haben die 90°-Drehung und die 270°-Drehung (eine 270°-Drehung ist gleich einer $(-90)°$-Drehung) um die Achse Ordnung 4. Insgesamt liefert das 6 Orientierungserhaltende Symmetrien mit Ordnung 4. Man kann jede dieser Drehungen mit einer Spiegelung an der Ebene, die senkrecht auf der Achse steht, verknüpfen, um 6 weitere orientierungsumkehrende Symmetrien mit Ordnung 4 zu beschreiben. Zum Beispiel die 90°-Drehung um die x-Achse wird mit der Spiegelung an die yz-Ebene verknüpft: diese neue Symmetrie hat auch Ordnung 4. Insgesamt bekommt man $6 + 6 = 12$ Elemente mit Ordnung 4.

Es gibt 8 Elemente mit Ordnung 6 in Sym(W): sei W wie folgt orientiert (der Schwerpunkt von W liegt in $(0, 0, 0)$).



Dann betrachten wir die folgende Symmetrie $\theta \in \mathrm{Sym}(W)$: $\theta := s_{yz} \circ \rho_{xyz}$, wobei s_{yz} die Spiegelung an die yz-Ebene ist und ρ_{xyz} die 120°-Drehung um die $(x = y = z)$-Gerade im Uhrzeigersinn ist. Dann hat θ Ordung 6.



Für jede Ecke von W kann man solch eine Symmetrie definieren, also gibt es 8 Elemente der Ordnung 6 in $\mathrm{Sym}(W)$.

Insgesamt haben wir $1 + 19 + 8 + 12 + 8 = 48$ Elemente beschrieben, also alle Elemente von $\mathrm{Sym}(W)$.

(ii) Wir bemerken zuerst, dass eine Untergruppe der Ordnung 4 keinen Element der Ordnung > 4 und der Ordnung 3 enthalten darf, also enthält eine Untegruppe der Ordnung 4 nur Elemente der Ordnung 1 (die Indentität), 2 oder 4. Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten: die Untegruppe entält (mindestens) ein Element der Ordnung 4 oder die Untegruppe entält drei Elemente der Ordnung 2.

Sei $a \in \mathrm{Sym}(W)$ der Ordnung 4, dann beschreibt

$$H := \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$$

genau eine Untegruppe der Ordnung 4: die von a erzeugte zyklische Untergruppe der Ordnung 4. Es gibt zwei Arten von diese Untegruppen in $\mathrm{Sym}(W)$:

(I) Jede 90°-Drehung um die Koordinateachsen erzeugt eine Untergruppe der Ordnung 4 (die gleich die von der 270°-Drehung erzeugte Untergruppe ist). So erhalten wir 3 Untergruppen.

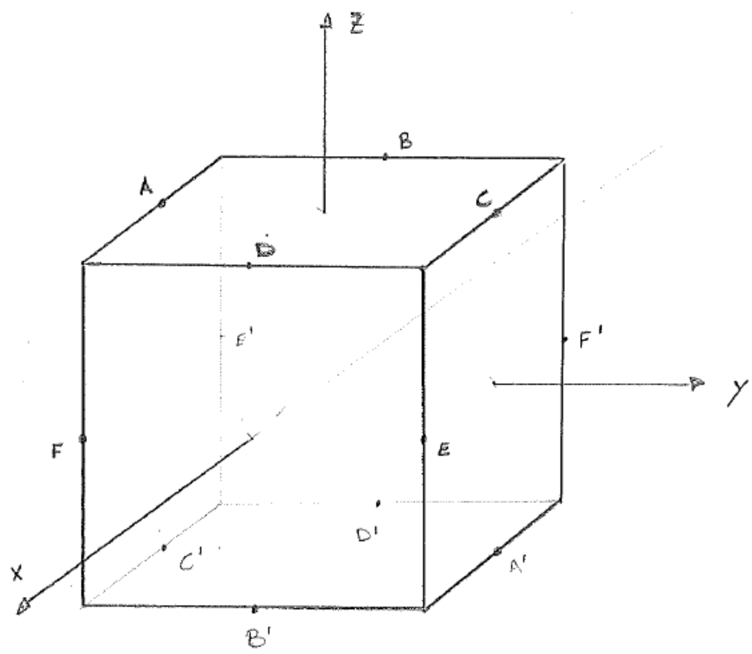
(II) Jede "Drehspiegelung" der Ordnung 4 erzeugt eine Untegruppe der Ordnung 4 (die gleich die von der andere Drehspiepiegelung um die selbe Achse erzeugte Untegruppe ist). So erhalten wir 3 Untegruppen.

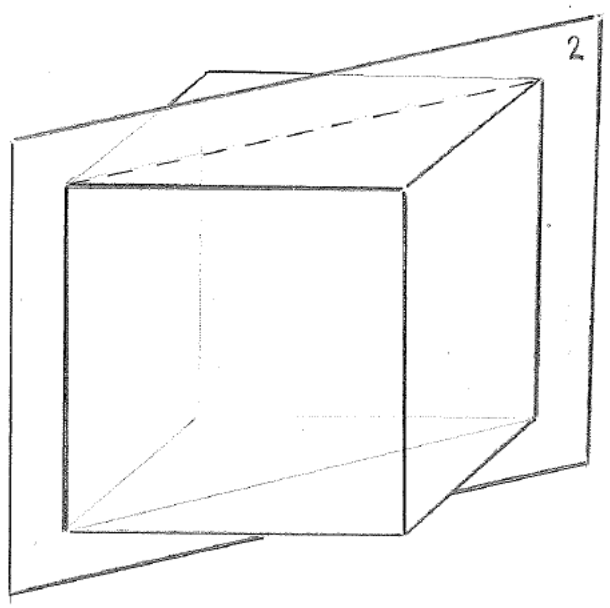
Jetzt seien $c, d \in \mathrm{Sym}(W)$, $c \neq d$, der Ordnung 2: jede Untegruppe die beide enthält muss auch $c \circ d$ und $d \circ c$ enthalten. Als $c \circ d \neq e$ und $d \circ c \neq e$ (sonst wäre $c = d^{-1} = d$) schliessen wir, dass

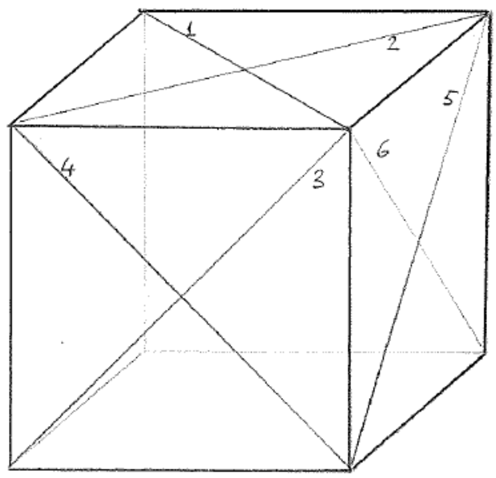
$$H := \{e, c, d, c \circ d\}$$

genau eine Untergruppe der Ordnung 4 ist, wenn $c \circ d = d \circ c$ gilt. Wir bestimmen jetzt alle Paare $c, d \in \mathrm{Sym}(W)$ mit $c \neq d$ die kommutieren. Zuerst nennen wir alle relevante Symmetrien:

- P: die Punktspiegelung,
- R_x, R_y, R_z: die 180°-Drehungen um die Koordinatenachsen,
- $R_A, R_B, R_C, R_C, R_D, R_E, R_F$: die 180°-Drehungen um die Gerade durch A und A', um die Gerade durch B und B', usw..,
- S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}: die Spiegelungen um die xy-, xz- und yz-Ebene,
- $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$: die Spiegelungen um die gezeichnete Ebenen.







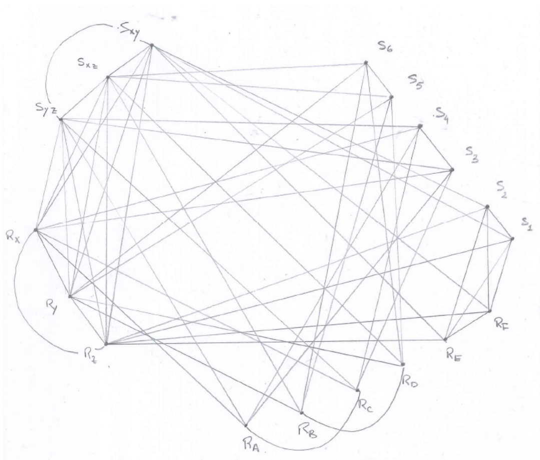
Man kann folgendes zeigen (geometrisch oder z. B. mit Lineare Algebra):

- die Punktspiegelung kommutiert mit alle andere Symmetrien,
- zwei 180°-Drehungen kommutieren nur falls sie um die selbe Achse drehen (in unserem Fall das passiert nie, denn $c \circ d \neq e$) oder falls die Drehungsachsen senkrecht aufeinander stehen,
- eine Drehung und eine Spiegelung kommutieren falls die Drehungsachse senkrecht auf der Spiegelungesebene steht oder auf der Spiegelungsebene

liegt,

– zwei Spiegelungen kommutieren nur falls die Spiegelungsebenen senkrecht aufeinanander stehen.

Folgendes Diagram zeigt genau welche Symmetrien kommutieren (P erscheint nicht, denn sie mit alle andere Symmetrien kommutiert):



Um die Untergruppen explizit zu beschreiben, müssen wir noch alle Elemente die kommutieren verknüpfen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
P \circ R_A = S_3 &\Longleftrightarrow P \circ S_3 = R_A \Longleftrightarrow R_A \circ S_3 = P, \\
P \circ R_B = S_6 &\Longleftrightarrow P \circ S_6 = R_B \Longleftrightarrow R_B \circ S_6 = P, \\
P \circ R_C = S_4 &\Longleftrightarrow P \circ S_4 = R_C \Longleftrightarrow R_C \circ S_4 = P,
\end{aligned}$$

und so weiter. So kann man alle Untergruppen explizit beschreiben, es gibt 7 Arten davon:

(III) $\{e, P, R_x, S_{yz}\}$, $\{e, P, R_y, S_{xz}\}$, $\{e, P, R_z, S_{xy}\}$,

(IV) $\{e, P, R_A, S_3\}$, $\{e, P, R_B, S_6\}$, $\{e, P, R_C, S_4\}$ $\{e, P, R_D, S_5\}$, $\{e, P, R_E, S_2\}$, $\{e, P, R_F, S_1\}$,

(V) $\{e, R_x, S_{xy}, S_{xz}\}$, $\{e, R_y, S_{yz}, S_{xy}\}$, $\{e, R_z, S_{xz}, S_{xy}\}$,

(VI) $\{e, R_x, S_4, S_3\}$, $\{e, R_y, S_5, S_6\}$, $\{e, R_z, S_1, S_2\}$,

(VII) $\{e, R_A, S_{yz}, S_4\}$, $\{e, R_C, S_{yz}, S_3\}$, $\{e, R_E, S_{xy}, S_1\}$, $\{e, R_F, S_{xy}, S_2\}$, $\{e, R_B, S_{xz}, S_5\}$, $\{e, R_D, S_{xz}, S_6\}$,

(VIII) $\{e, R_x, R_y, R_z\}$,

(IX) $\{e, R_E, R_F, R_z\}$, $\{e, R_A, R_C, R_x\}$, $\{e, R_B, R_D, R_y\}$.

(iii) Die triviale Untergruppe hat Ordnung 1. Die gesamte Gruppe hat Ordnung 48. Eine Untergruppe der Ordnung 24 ist durch die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(T) = S_4$ des Tetraeders gegeben, mit der üblichen Einbettung von T

in W. Eine Untergruppe der Ordnung 12 von W ist dann durch $Sym^+(T)$ gegeben, die orientierungserhatltenden Symmetrien von T. Da S_4 eine zu S_3 isomorphe Untergruppe enhält - etwa die Menge aller Permutationen von $\{1;2;3;4\}$, die 4 auf sich selbst abbilden - erhalten wir ebenfalls Untergruppen der Ordnungen 2, 3 und 6. Eine Untergruppe der Ordnung 4 erhalten wir mittels zweier Spiegelungen an zu einander orthogonalen Koordinatenebenen. Durch Hinzufügen der Ebene, die zu diesen beiden orthogonal ist und ebenfalls durch den Schwerpunkt verläuft, erhalten wir eine Untergruppe der Ordnung 8. Eine Untergruppe der Ordnung 16 erhalten wir nun durch Kombination der obigen Gruppe der Ordnung 8, die Koordinatenachsen umkehrt, mit einer Drehung, die etwa die x-Achse in die y-Achse überführt.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_n.

Lösung

Wie in Aufgabe 1 schreiben wir $D_n = \{r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots s_n\}$. Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass D_n von $r := r_1$ und $s := s_1$ erzeugt werden kann. Sei H eine Untergruppe von D_n.

Falls H nur aus Drehungen besteht, sei d die kleinste Zahl in $\{1, \ldots, n$ sodass $r^d \in H$. Wir behaupen, dass d n teilen muss. Beachte zuerst, dass $r^{kd} \in H$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ da H eine (Unter)Gruppe ist. Falls d kein Teiler von n ist, dann es existieren $m \in \mathbb{N}$ und $0 < s < d$ sodass $n = m \cdot d + s$. Also $n - s = m \cdot d$ und

$$r^{d(m+1)} = r^{dm+d} = r^{n-s+d} = r^n \circ r^{d-s} = r^{d-s}.$$

Das zeigt, dass $r^{d-s} \in H$ mit $d - s \in \{1, \ldots, n\}$ und $d - s < d$. Widerspruch.

Jetzt behaupten wir, dass $\langle r^d \rangle = H$. Nehmen wir an, dass $H \neq \langle r^d \rangle$. Sei $r^l \in H \setminus \langle r^d \rangle$ wobei $l \in \{d+1, \ldots, n\}$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Dann ist $r^l \circ r^{-d} = r^{l-d} \in H$, $0 < l - d < l$ und $l - d$ ist kein Vielfach von d (sonst wäre $r^l \in \langle r^d \rangle$). Widerspruch. So haben wir gezeigt, dass $H = \langle r^d \rangle$ wobei d ein Teiler von n ist.

Jetzt betrachten wir den Fall, wobei H auch Spiegelungen enthält. Seien $\langle r^d \rangle$ die Drehungen die in H enthalten sind und sei i die kleinste Zahl in $\{1, \ldots, n\}$ sodass $r^i s \in H \setminus \langle r^d \rangle$. Das impliziert, dass $1 \leq i \leq d$, sonst wäre $r^{-d} \circ r^i s = r^{i-d} s$ auch in H und $0 < i - d < i$. Dann enthält H die folgende Untergruppe:

$$H' := \left\{ r^{kd}, r^{kd+i} s \,\middle|\, 1 \leq k \leq \frac{n}{d} \right\}.$$

Wir behaupten, dass $H = H'$. Nehmen wir an, dass es eine Spiegelung in $H \setminus H'$ gibt und sei $l \in \{i+1, \ldots, n\}$ die kleinste Zahl sodass $r^l s \in H \setminus H'$. Wie vorher schliessen wir, dass $1 \leq l \leq d$, aber dann

$$r^l s \circ r^i s = r^l \circ r^{-i} = r^{l-i} \in H.$$

Beachte, dass $l - i > 0$ und $l - i \leq d - 1 < d$. Widerspruch, denn d war die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 4

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ aller Automorphismen von G eine Gruppe ist.

Lösung

Wir bezeichnen mit $*$ die Gruppenoperation auf G (d.h. G ist die Gruppe $(G,*)$) und mit $\circ$ die Verknüpfung von Automorphismen und wir zeigen, dass $(Aut(G),\circ)$ eine Gruppe ist.

1) (Abgeschlossenheit) Wir zeigen, dass fall φ und ψ in $Aut(G)$ sind, dann ist auch $\varphi\circ\psi$ in $Aut(G)$. Aus der Bijektivität von φ und ψ folgt die Bijektivität von $\varphi\circ\psi$. Ausserdem gilt es für $g,h\in G$, dass

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\psi)(g*h) &= \varphi\big(\psi(g*h)\big) = \varphi\big(\psi(g)*\psi(h)\big)\\ &= \varphi\big(\psi(g)\big)*\varphi\big(\psi(h)\big) = (\varphi\circ\psi)(g)*(\varphi\circ\psi)(h),\end{aligned}$$

   was $\varphi\circ\psi\in Aut(G)$ zeigt.

2) (Assoziativität) Assoziativität von $\circ$ folgt aus Serie 02, Aufgabe 01.

3) (Neutrales Element) Bemerke, dass $\mathrm{id}_G\circ\varphi=\varphi\circ\mathrm{id}_G=\varphi$ für alle $\varphi\in Aut(G)$, wobei id_G der Identitätisomoprhismus auf G ist.

4) (Inverses) Es sei $\varphi\in Aut(G)$, also ist φ bijektiv und besitzt eine bijektive Inverse $\theta=\varphi^{-1}\colon G\longrightarrow G$ sodass $\theta\circ\varphi=\varphi\circ\theta=\mathrm{id}_G$. Es bleibt noch zu zeigen, dass θ ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien $g,h\in G$, dann

$$g*h = id_G(g)*\mathrm{id}_G(h) = (\varphi\circ\theta)(g)*(\varphi\circ\theta)(h) = \varphi\big(\theta(g)*\theta(h)\big),$$

   also ist φ ein Gruppenhomomorphismus. Mit einer Anwendung von θ bekommt man genau $\theta(g*h)=\theta(g)*\theta(h)$, was zu zeigen war.

Aufgabe 5 — Wahr oder Falsch

Sei G eine Gruppe und $g,h\in G$.

(i) Aus $g^2=h^2$ folgt $g=h$.

(ii) Es sei $n>0$. Aus $h^n=1$ folgt $(ghg^{-1})^n=1$.

(iii) Für jedes $n>1$ besitzt die Gleichung $h^n=g$ eine Lösung h in G.

(iv) Die Gleichung $g^{-1}xg=h$ besitzt genau eine Lösung $x\in G$.

(v) Jede Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, die einen Fixpunkt besitzt, ist endlich.

Lösung

(i) Falsch. In der Gruppe $(\mathbb{Z}_2,+)=(\{\overline{0},\overline{1}\},+)$ gilt $\overline{0}+\overline{0}=\overline{1}+\overline{1}$ aber $\overline{0}\neq\overline{1}$.

(ii) Wahr. Berechne $(ghg^{-1})^n = \underbrace{ghg^{-1}\,ghg^{-1}\cdots ghg^{-1}}_{n\,-\mathrm{mal}} = gh^ng^{-1} = gg^{-1} = 1.$

(iii) Falsch. In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist die Menge $n\,\mathbb{Z}$ der n-ten Potenzen für $n > 1$ eine echte Teilmenge.

(iv) Wahr. Das Element $x := ghg^{-1} \in G$ löst die Gleichung. Falls ein beliebiges Element $x \in G$ die Gleichung löst, so ergibt sich durch Umformen mithilfe der Kürzungsregel: $x = ghg^{-1}$.

(v) Falsch. Die Untergruppe der Drehungen um den Ursprung ist unendlich.

Aufgabe 6*

Bestimmen Sie für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ die Anzahl der Untergruppen von $\mathrm{Sym}(W)$ der Ordnung k.