Serie 4

Aufgabe 1 — Wahr oder Falsch

Es sei G eine Gruppe. Für $h \in G$ betrachten wir die Abbildungen

$$C_h, L_h : G \to G, \qquad C_h(g) = hgh^{-1},\ L_h(g) = hg$$

genannt *Konjugation* beziehungsweise *Linksmultiplikation*. Welche der folgenden Aussagen treffen immer zu?

(i) C_h ist bijektiv.

(ii) C_h ist ein Isomorphismus.

(iii) L_h ist bijektiv.

(iv) L_h ist ein Isomorphismus.

Lösung

(i) Wahr. Es gilt $C_{h^{-1}} \circ C_h = \mathrm{id}_G = C_h \circ C_{h^{-1}}$. Also ist C_h bijektiv.

(ii) Wahr. Für $g, g' \in G$ gilt $C_h(gg') = hgg'h^{-1} = hgh^{-1}hg'h^{-1} = C_h(g)C_h(g')$. Damit ist C_h ein Homomorphismus und wegen Teil (i) ein Isomorphismus.

(iii) Wahr. Es gilt $L_{h^{-1}} \circ L_h = \mathrm{id}_G = L_h \circ L_h^{-1}$. Also ist L_h bijektiv.

(iv) Falsch. Es sei G eine nicht-triviale Gruppe und $h \in G$ nicht das neutrale Element. Dann gilt $L_h(1) = h \neq 1$. Also ist L_h kein Homomorphismus.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} C\colon G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ h &\longmapsto C_h, \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, wobei $C_h(g) := hgh^{-1}$.

Lösung

Aus Aufgabe 1(ii) $\Phi(h)$ ist ein Isomorphismus $G \longrightarrow G$ für alle h in G, das heisst, $\Phi(G) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$. Jetzt seien $h, h' \in G$ und sei $g \in G$ beliebig, dann:

$$\begin{aligned} \Phi(hh')(g) &= C_{hh'}(g) \\ &= hh'g(hh')^{-1} \\ &= hh'g(h')^{-1}h \\ &= hC_{h'}(g)h \\ &= C_h\big(C_{h'}(g)\big) \\ &= (C_h \circ C_{h'})(g) \\ &= \Phi(h) \circ \Phi(h')(g), \end{aligned}$$

was $\Phi(hh') = \Phi(h) \circ \Phi(h')$ zeigt.

Aufgabe 3 — Wahr oder Falsch

Es seien H und K Untergruppen von G. Welche von diesen Aussagen folgen?

(i) $H \cup K$ ist eine Untergruppe von G.

(ii) $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ ist eine Untergruppe von G.

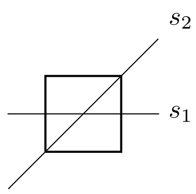
(iii) $HK = KH$.

(iv) HK ist eine Untergruppe von G, falls $HK = KH$.

Lösung

(i) Falsch. Sei $G = D_4$ und seien s_1, s_2 zwei verschiedene Spiegelungen in G. Dann definieren $H := \{e, s_1\}$ und $K := \{e, s_2\}$ zwei Untergruppen von G, aber $s_1 \circ s_2 \notin H \cup K$.

(ii) Falsch. Sei wieder $G = D_4$ und seien s_1 und s_2 die folgende zwei Spiegelungen:



Seien $H := \{e, s_1\}$ und $K := \{e, s_2\}$. Dann ist $H \circ K = \{e, s_1, s_2, s_1 \circ s_2\}$ keine Untergruppe von G, denn $s_1 \circ s_2 \neq s_2 \circ s_1$.

(iii) Falsch. Seien G, H, K wie in (iii): $s_1 \circ s_2 \in HK$ aber $s_1 \circ s_2 \notin KH$.

(iv) Wahr. Wir beweisen, dass $HK = KH$ eine Untergruppe ist.

(1) Seien $h_1 \circ k_1$ und $h_2 \circ k_2$ zwei Elemente von $H \circ K$, dann

$$(h_1 \circ k_1) \circ (h_2 \circ k_2) = h_1 \circ \underbrace{k_1 \circ h_2}_{=h_3 \circ k_3 \text{ da } HK = KH} \circ k_2 = \underbrace{h_1 \circ h_3}_{\in H} \circ \underbrace{k_3 \circ k_2}_{\in K}.$$

(2) Sei $h \circ k \in HK$, dann $(h \circ k)^{-1} = k^{-1} \circ h^{-1} \in KH = HK$.

Es folgt, dass $H \circ K$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 4

Es seien G und H Gruppen. Das *direkte Produkt* von G und H ist die Gruppe bestehend aus der Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g, h) \circ (g', h') := (gg', hh') \qquad \text{für } (g, h), (g', h') \in G \times H.$$

(i) Ist S_3 isomorph zu $C_2 \times C_3$?

(ii) Ist C_4 isomorph zu $C_2 \times C_2$?

(iii) Ist C_6 isomorph zu $C_2 \times C_3$?

(iv) Beweisen Sie: $\mathrm{Sym}(W)$ ist isomorph zu $\mathrm{Sym}(T) \times C_2$.

Lösung

(i) Nein. Die Gruppe $C_2 \times C_3$ is abelsch, S_3 aber nicht: Beispielsweise gilt $(12)(23) = (123)$ aber $(23)(12) = (132)$. Also kann S_3 nicht zu $C_2 \times C_3$ isomorph sein.

(ii) Nein. Alle nicht-triviale Elemente von $C_2 \times C_2$ haben Ordnung 2 aber $\overline{1}$ in C_4 hat Ordnung 4.

(iii) Ja. Wir definieren $\varphi : C_6 \to C_2 \times C_3$ durch $\varphi(\overline{n}) := n(\overline{1}, \overline{1})$. Dies ist wohl-definiert, da für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(n + 6k)(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{n + 6k}, \overline{n + 6k}) = (\overline{n}, \overline{n}) = n(\overline{1}, \overline{1}).$$

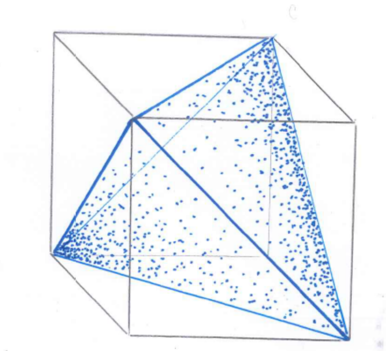
Die Abbildung φ ist nun ein Homomorphismus, da

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{n}+\overline{m}) = \varphi(\overline{n + m}) &= (n + m)(\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{n + m}, \overline{n + m}) = (\overline{n} + \overline{m}, \overline{n} + \overline{m}) \\ &= (\overline{n}, \overline{n}) + (\overline{m}, \overline{m}) = n(\overline{1}, \overline{1}) + m(\overline{1}, \overline{1}) = \varphi(\overline{n}) + \varphi(\overline{m}).\end{aligned}$$

Injektivität und Surjektivität:

$$\begin{array}{ll} \varphi(\overline{0}) = (\overline{0}, \overline{0}) & \varphi(\overline{1}) = (\overline{1}, \overline{1}) \\ \varphi(\overline{2}) = (\overline{0}, \overline{2}) & \varphi(\overline{3}) = (\overline{1}, \overline{0}) \\ \varphi(\overline{4}) = (\overline{0}, \overline{1}) & \varphi(\overline{5}) = (\overline{1}, \overline{2}) \end{array}$$

(iv) Sei W der Würfel und T das folgende eingebettete Tetraeder:



So ist $\mathrm{Sym}(T)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(W)$ (es gibt mehrere Untergruppen von $\mathrm{Sym}(W)$ die zu $\mathrm{Sym}(T)$ isomorph sind, aber in dieser Teilaufgabe meinen wir mit $\mathrm{Sym}(T)$ genau die Symmetrien des Würfels, die das gezeichnete Tetraeder in sich selbst abbilden).

Die Idee, um einen Isomorphismus $\mathrm{Sym}(T) \times C_2 \longrightarrow \mathrm{Sym}(W)$ zu konstruiren, ist zu bemerken, dass die Elemente von $\mathrm{Sym}(W)$ entweder T erhalten oder nicht. Falls eine Symmetrie $a \in \mathrm{Sym}(W)$ das Tetraeder T nicht erhält, dann wird $a \circ P = P \circ a$ das Tetraeder T erhalten (wobei P die

Punktspiegelung bezeichnet), und umgekehrt. Also definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi\colon \operatorname{Sym}(T) \times C_2 &\longrightarrow \operatorname{Sym}(W), \\ (a, \overline{0}) &\longmapsto a, \\ (a, \overline{1}) &\longmapsto aP. \end{aligned}$$

Mit dieser Notation ist es gemeint, dass jedes Element der Form $(a, \overline{0})$ zu a und jedes der Form $(a, \overline{1})$ zu aP abgebildet wird.[1]

(1) φ ist ein Homomorphismus:

$$\begin{aligned} &\varphi\big((a,\overline{0})(b,\overline{0})\big) = \varphi\big((ab,\overline{0})\big) = a \circ b = \varphi\big((a,\overline{0})\big)\varphi\big((b,\overline{0})\big), \\ &\varphi\big((a,\overline{1})(b,\overline{0})\big) = \varphi\big((ab,\overline{1})\big) = abP = aPb = \varphi\big((a,\overline{1})\big)\varphi\big((b,\overline{0})\big), \\ &\varphi\big((a,\overline{0})(b,\overline{1})\big) = \varphi\big((ab,\overline{1})\big) = abP = \varphi\big((a,\overline{0})\big)\varphi\big((b,\overline{1})\big), \\ &\varphi\big((a,\overline{1})(b,\overline{1})\big) = \varphi\big((ab,\overline{0})\big) = ab = abP^2 = aPbP = \varphi\big((a,\overline{1})\big)\varphi\big((b,\overline{1})\big). \end{aligned}$$

(2) φ ist injektiv: wir bemerken zuerst, dass $(a, \overline{0})$ und $(b, \overline{1})$ sicher verschiedene Bilder haben. Dann sind $\varphi\big((a,\overline{0})\big) \neq \varphi\big((a',\overline{0})\big)$ und $\varphi\big((b,\overline{1})\big) \neq \varphi\big((b',\overline{1})\big)$, falls $a \neq a'$ und $b \neq b'$ $(bP \neq b'P \Leftrightarrow b \neq b')$.

(3) φ ist surjektiv: sei $c \in \operatorname{Sym}(W)$. Falls $c(T) = T$, dann $c \in \operatorname{Sym}(T)$ und $c = \varphi\big((c, \overline{0})\big)$. Sonst $cP \in \operatorname{Sym}(T)$ und $c = cPP = \varphi\big((cP, \overline{1})\big)$.

Aufgabe 5

(i) Finden Sie zwei Untergruppen der Ordnung 4 in $\operatorname{Sym}(W)$, die isomorph aber nicht konjugiert sind.

(ii) Finden Sie eine Untergruppe der Ordnung 4 in $\operatorname{Sym}(T)$, die nur zu sich selbst konjugiert ist.

Lösung

(i) Aus Serie 3, Aufgabe 2(ii) kennen wir alle Untergruppen der Ordnung 4 in $\operatorname{Sym}(W)$. Wir benutzen die selbe Notation: die zwei Untergruppen $\big\{e, R_x, R_y, R_z\big\}$ und $\big\{e, R_x, S_{xy}, S_{xz}\big\}$ sind nicht konjugiert, denn eine nur Drehungen enthält und die andere auch Ebenenspiegelungen.

Die Untergruppen sind isomorph: ein konkreter Isomorphismus ist gegeben durch

$$\phi\colon \big\{e, R_x, R_y, R_z\big\} \longrightarrow \big\{e, R_x, S_{xy}, S_{xz}\big\},$$

$\phi(e) = e$, $\phi(R_x) = R_x$, $\phi(R_y) = S_{xy}$ und $\phi(R_z) = S_{xz}$.

[1] Eine andere Möglichkeit wäre die folgende (die Inverse von φ):

$$\begin{aligned} \psi\colon \operatorname{Sym}(W) &\longrightarrow \operatorname{Sym}(T) \times C_2, \\ b &\longmapsto \begin{cases} (b, \overline{0}), & b \text{ erhält } T, \\ (bP, \overline{1}), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Eine dritte (äquivalente) Möglichkeit wäre die folgende: sei $H \coloneqq \{e, P\} = \{P^2, P\}$, dann ist H isomorph zu C_2 und $\operatorname{Sym}(T) \times C_2$ isomorph zu $\operatorname{Sym}(T) \times H$. Ein Isomorphimus $\phi\colon \operatorname{Sym}(T) \times H \longrightarrow \operatorname{Sym}(W)$ ist dann gegeben durch $\phi(a, P^i) \coloneqq aP^i$, für $i \in \{1, 2\}$.

(ii) Sei T das Tetraeder aus Aufgabe 3(iv). Wir benutzen die selbe Notation aus Aufgabe 2(ii) von Serie 3. Die Untergruppe $H := \{e, R_x, R_y, R_z\}$ von $\mathrm{Sym}(W)$ erhält T, das heisst, H ist auch eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(T)$. Aus Aufgabe 2(ii) von Serie 3 wissen wir, dass H nur zu sich selbst in $\mathrm{Sym}(W)$ konjugiert ist, also ist H nur zu sich selbst konjugiert auch in $\mathrm{Sym}(T)$.

Aufgabe 6

Es seien T das Tetraeder und D das Dodekaeder. Finden Sie fünf konjugierte Untergruppen von $\mathrm{Sym}(D)$, die isomorph zu $\mathrm{Sym}^+(T)$, die orientierungserhaltenden Symmetrien von T, sind. (*Hinweis: betten Sie zehn Kopien von T in D ein.*)

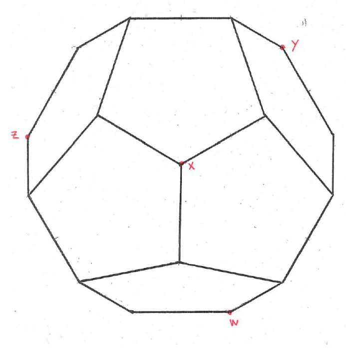
Lösung

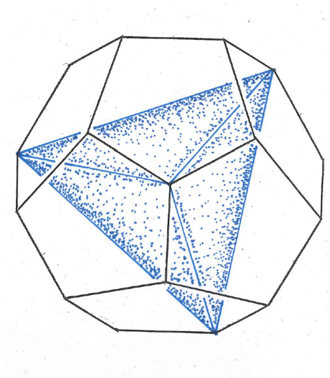
Wir beginnen mit einer allgemeinen Bemerkung. Die orientierungserhaltenden Symmetrien des Tetraeders sind 12: die Identität; vier 120°-Drehungen und vier 240°-Drehungen um die Achsen, die durch eine Facette und die gegenüberliegenden Ecke, verlaufen; drei 180°-Drehungen um die Achsen, die durch zwei gegenüberliegenden Kanten verlaufen. Die 180°- und 240°-Drehungen können als Verknüpfung von mehreren 120°-Drehungen beschrieben werden. Diese Beobachtung hat die folgende nützliche Anwendung. Sei T_0 ein Tetraeder in D und sei

$$H_{T_0} := \{ g \in \mathrm{Sym}(D) \mid g(T_0) = T_0 \}$$

die Menge aller Symmetrien von D, die T_0 erhalten. H_{T_0} ist eine Untegruppe von D und falls wir zeigen, dass H_{T_0} die vier 120°-Drehungen von T_0 und keine Spiegelung entält, dann ist $H_{T_0} = \mathrm{Sym}^+(T_0) \cong \mathrm{Sym}^+(T)$.

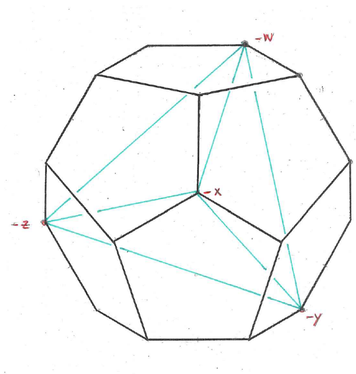
Jetzt konstruieren wir ein Tetraeder in D. Sei x eine Ecke von D, man kann einfach verifizieren, dass die Ecken x, y, w, z ein Tetraeder bestimmen:





Wir nennen dieses Tetraeder T_x. Es folgt aus der Konstruktion, dass $T_x = T_y = T_w = T_z$. Wir bemerken, dass H_{T_x} die 120°-Drehung um die Achse, die durch x und $-x$ verläuft, enthält. Analaog schliessen wir, dass H_{T_x} auch die 120°-Drehungen um die $\{y, -y\}$-, $\{w, -w\}$-, $\{z, -z\}$-Achsen enthält. Die Spiegelungen in $\mathrm{Sym}(D)$ erhalten das Tetraheder T_x nicht, also schliessen wir, dass die Symmetrien des Dodekaeders, die T_x erhalten, genau die Untergruppe $H_{T_x} \cong \mathrm{Sym}^+(T_x)$ bestimmen.

T_x ist nich das einzige Tetraeder in D, das von H_{T_x} erhalten ist. Nämlich, betrachte $T'_x := P(T_x)$, wobei P die Punktspiegelung in $\mathrm{Sym}(D)$ bezeichnet. Konkret ist T'_x von den 4 Punkten $\{-x, -y, -w, -z\}$ bestimmt. Passen Sie auf: $T'_x \neq T_{-x}$. das folgende Bild zeigt D von hinten:



Dann ist geometrisch klar, dass H_{T_x} erhält T'_x, aber man könnte es folgendermassen beweisen: sei $g \in H_{T_x}$, d.h. $g(T_x) = T_x$, dann

$$g(T'_x) = g \circ P(T_x) = P \circ g(T_x) = P(T_x) = T'_x,$$

da $P \circ g = g \circ P$.

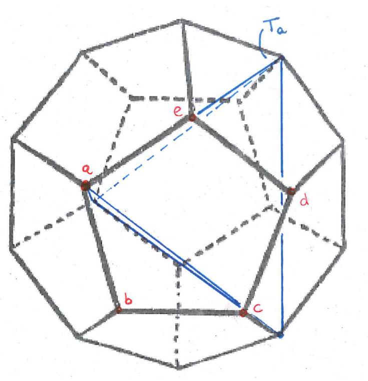
Insbesondere es gilt $H_{T_x} \subseteq H_{T'_x}$, und analog $H_{T'_x} \subset H_{T_x}$. So gilt es, dass

$$H_{T_x} = H_{T'_x}.$$

Wir können diese Konstruktion für jede Ecke in D wiederholen und als D 20 Ecken besitzt und $T_x = T_y = T_w = T_z$, erhalten wir insgesamt $\frac{2 \cdot 20}{4} = 10$

eingebettete Tetraedern in D: fünf der Form T_x und fünf der Form T'_x. Jede zwei von diesen sind von der selben Untergruppe erhalten, also haben wir fünf Untergruppen von $\mathrm{Sym}(D)$ gefunden, die zu $\mathrm{Sym}^+(T)$ isomorph sind.

Wir zeigen jetzt, dass diese Untergruppen in $\mathrm{Sym}(D)$ konjugiert sind. Die erste Konstruktion liefert fünf eingebettete Tetraedern so, dass jede Ecke von D die Ecke von genau einem Tetraeder ist: seien a, b, c, d und e fünf Ecken, die auf eine Facette F von D liegen, dann sind T_a, T_b, T_c, T_d und T_e die fünf verschiedene Tetraedern, die die erste Konstruktion liefert.



Insbesondere sind $H_{T_a}, H_{T_b}, H_{T_c}, H_{T_d}, H_{T_e}$ paarweise verschieden Untergruppen von $\mathrm{Sym}(D)$, die alle zu $\mathrm{Sym}^+(T)$ isomorph sind. Sei $g \in \mathrm{Sym}(D)$ die $\frac{2\pi}{5}$-Drehung um die Achse, die durch F und die gegenüberliegende Facette verläuft. Es gilt $g(a) = b$ und $g(T_a) = T_b$, denn $g(T_a)$ ist wieder ein Tetraeder mit einer Ecke in b (als g orientierungerhaltend ist, kann $g(T_a)$ keine der gespiegelten Tetraedern $T'_a, T'_b, T'_c, T'_d, T'_e$ sein). Sei $h \in H_{T_a}$, dann $h(T_a) = T_a$ und

$$ghg^{-1}(T_b) = gh(T_a) = g(T_a) = T_b.$$

Also $gH_{T_a}g^{-1} \subset H_{T_b}$. Aus Aufgabe 1 wissen wir, dass die Konjugation bijektiv ist, so als $|H_{T_a}| = |H_{T_b}|$ folgen wir, dass $gH_{T_a}g^{-1} = H_{T_b}$. Die andere Konjugationen folgen analog.