Serie 5

Aufgabe 1 (Bilder und Urbilder)

Sei $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, $L \subseteq G$, $K \subseteq H$. Beweisen Sie:

(i) $L \leq G \Longrightarrow f(L) \leq H$.

(ii) $L \trianglelefteq G \not\Longrightarrow f(L) \trianglelefteq H$.

(iii) $K \leq H \Longrightarrow f^{-1}(K) \leq G$.

(iv) $K \trianglelefteq H \Longrightarrow f^{-1}(K) \trianglelefteq G$.

Lösung

(i) $f(e) \in f(L)$, denn e ist in L. Seien $f(l_1), f(l_2) \in f(L)$, dann

$$f(l_1)f(l_2) = f(\underbrace{l_1 l_2}_{\in L}) \in f(L)$$

und

$$f(l_1)^{-1} = f(\underbrace{l_1^{-1}}_{\in L}) \in f(L).$$

(ii) Sei $H \coloneqq \mathrm{Sym}(W)$ und $G \coloneqq \{e, R_x, R_y, R_z\}$ die normale Untergruppe der 180°-Drehungen um die Koordinatenachsen. Sei $f\colon G \longrightarrow H$ die Inklusion. Dann ist $L \coloneqq \{e, R_x\}$ normal in G (denn G ist abelsch) aber nicht in H.

(iii) $e \in f^{-1}(K)$, denn $f(e) = e \in K$. Seien $x, y \in f^{-1}(K)$, dann

$$f(xy) = \underbrace{f(x)}_{\in K}\underbrace{f(y)}_{\in K} \in K,$$

also $xy \in f^{-1}(K)$ und

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \in K,$$

also $x^{-1} \in f^{-1}(K)$.

(iv) Sei $x \in f^{-1}(K)$ und $g \in G$, dann $f(g) \in H$ und

$$f(gxg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)\underbrace{f(h)}_{\in K}f(g)^{-1} \in K,$$

also $gxg^{-1} \in f^{-1}(K)$.

Aufgabe 2 (Untergruppen von Index 2)

Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe. Annahme: $G = H \cup aH$ mit $a \notin H$. Zeigen Sie (ohne Hilfssatz A):

(i) $G = H \cup aH$ ist eine Zerlegung von G, d.h. $H \cap aH = \emptyset$.

(ii) $|H| = |G|/2$, falls G endlich ist.

(iii) H ist normal in G.

(iv) Es existiert einen Homomorphismus $f\colon G \longrightarrow \{\pm 1\}$ mit $\ker(f) = H$.

Lösung

(i) Falls $H \cap aH \neq \emptyset$, dann existieren $h_1, h_2 \in H$ so, dass $h_1 = ah_2$. So ist $a = h_1 h_2^{-1} \in H$. Widerspruch.

(ii) Die Abbildung $L_a \colon H \longrightarrow aH$, $L_a(h) = ah$ ist bijektiv. Also $|H| = |aH|$ und die Behauptung folgt.

(iii) Sei $g \in G$. Falls $g \in H$ ist, dann $gHg^{-1} \subset H$, weil H eine Untergruppe ist.

Falls $g \in aH$ ist, dann $g = ah'$, für $h' \in H$. Sei $h \in H$ beliebig, dann

$$ghg^{-1} = ah'h(ah')^{-1} = ah'h(h')^{-1}a^{-1}.$$

Wir bemerken, dass $h'' \coloneqq h'h(h')^{-1} \in H$. Also zu zeigen ist, dass $ah''a^{-1} \in H$. Falls nicht, dann existiert es $x \in H$ mit $ah''a^{-1} = ax$, aber das impliziert $a \in H$. Widerspruch.

(iv) Wir defininieren $f \colon G \longrightarrow \{\pm 1\}$ als $f(h) = 1$ und $f(ah) = -1$. Dann

$$f(hh') = 1 = f(h)f(h').$$

Beachte, dass $h(ah')$ und $(ah)h'$ nicht in H sind, sonst wäre $a \in H$. Also

$$f(h(ah')) = -1 = f(h)f(ah')$$

und

$$f((ah)h') = -1 = f(ah)f(h').$$

Zudem gilt es, dass $ahah' \in H$ ist, sonst

$$ahah' = ah'' \Longleftrightarrow hah' = h'' \Longleftrightarrow a = h^{-1}h''(h')^{-1} \in H$$

also

$$f((ah)(ah')) = 1 = f(ah)f(ah').$$

Es folgt aus der Definition, dass $\ker(f) = H$.

Aufgabe 3 (Punktspiegelungen)

Sei Q die von allen Punktspiegelungen erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Seien P_x die Punktspiegelung an $x \in \mathbb{R}^2$, T_b die Verschiebung um $b \in \mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie alle Konjugationen ABA^{-1}, wobei $A, B \in \{T_a : a \in \mathbb{R}^2\} \cup \{P_x : x \in \mathbb{R}^2\}$.

(ii) Listen Sie alle Elementen von Q auf.

(iii) Zeigen Sie, dass die Verschiebungen eine normale Untergruppe von Q bilden.

(iv) Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Homomorphismus $Q \to C_2$ gibt.

Lösung

(i)
$$P_xP_y = T_{2(x-y)}.$$
Also, $P_y = P_xT_{2(x-y)}$ und falls wir $2(x-y) = a$ einsetzen, dann erhalten wir
$$P_xT_a = P_{x-\frac{1}{2}a}.$$
Zudem gilt es
$$T_aT_b = T_{a+b}$$
so
$$P_xP_yP_x^{-1} = P_x(P_yP_x) = P_xT_{2(y-x)} = P_{x-(y-x)} = P_{2x-y}.$$
$$P_xT_aP_x^{-1} = (P_xT_a)P_x = P_{x-\frac{1}{2}a}P_x = T_{2(x-\frac{1}{2}a-x)} = T_{-a},$$
also, $P_xT_a = T_{-a}P_x$ so
$$T_aP_xT_a^{-1} = T_aP_xT_{-a} = T_aP_xT_{-a} = T_aP_{x+\frac{1}{2}a} = P_{x+\frac{1}{2}a}T_{-a} = P_{x+a},$$
und
$$T_aT_bT_a^{-1} = T_aT_bT_{-a} = T_{a+b-a} = T_b.$$

(ii) Es folgt aus (i), dass $Q = \{P_x \mid x \in \mathbb{R}^2\} \cup \{T_a \mid a \in \mathbb{R}^2\}$.

(iii) Lösung 1: Die Untergruppe der Translationen ist selbskonjugiert aus (i).
Lösung 2: es folgt aus (i), dass
$$P_0T_a = P_{-\frac{1}{2}a} \Longrightarrow P_0T_{-2x} = P_x$$
für alle x in $\mathbb{R}^2$. Das heisst
$$\{P_x \mid x \in \mathbb{R}^2\} = P_0\{T_b \mid b \in \mathbb{R}^2\}.$$
Also folgt (iii) aus Aufgabe 3 (iii).

(iv) Sei f wie in Aufgabe 2 (iv) definiert, dann ist f ein surjektiver Homomorphismus.

Aufgabe 4 (Zentrum)

Sei G eine Gruppe. Ein Element von G heisst *zentral* falls es mit allen Elementen kommutiert. Die Menge $Z(G)$ aller zentralen Elementen heisst das *Zentrum* von G.

(i) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine normale Untergruppe von G ist.

(ii) Finden Sie das Zentrum der folgenden Gruppen (ohne Beweis):

- Die Einheitsquaternion $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ (Serie 2, Aufgabe 2),
- D_n,
- $\mathrm{Sym}(T)$, $\mathrm{Sym}(W)$, $\mathrm{Sym}(D)$, $\mathrm{Sym}(P)$ (Aufgabe 5 unten),
- $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$,
- Die invertierbare $n \times n$ reellen Matrizen $GL(n, \mathbb{R})$.
- Die invertierbare $n \times n$ komplexen Matrizen $GL(n, \mathbb{C})$.

Lösung

(i) Seien $x, y \in Z(G)$ und sei $g \in G$ beliebig, dann

$$geg^{-1} = gg^{-1} = e$$

also $e \in Z(G)$;

$$g(xy)g^{-1} = \underbrace{gxg^{-1}}_{=x}\underbrace{gyg^{-1}}_{=y} = xy,$$

also $xy \in Z(G)$;

$$(gx^{-1}g^{-1})^{-1} = gxg^{-1} = x$$

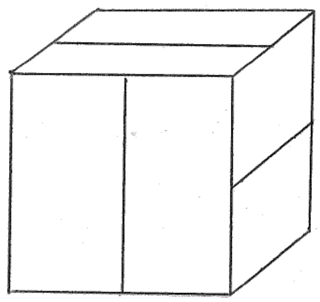
i.e. $gx^{-1}g^{-1} = x^{-1}$, so $x^{-1} \in Z(G)$ und $Z(G)$ ist eine Untergruppe.

Zudem gilt es für $x \in Z(G)$ und $g \in G$: $gxg^{-1} = x$, i.e. $gZ(G)g^{-1} = Z(G)$.

(ii)
- $Z(\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}) = \{\pm 1\}$.
- $Z(D_n) = \{\mathrm{id}\}$ falls n ungerade und $Z(D_n) = \{\pm \mathrm{id}\}$ falls n gerade.
- $Z(\mathrm{Sym}(T)) = \{\mathrm{id}\}$ und $Z(\mathrm{Sym}(W)) = Z(\mathrm{Sym}(D)) = Z(\mathrm{Sym}(P)) = \{\pm \mathrm{id}\}$.
- $Z(\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)) = \{\mathrm{id}\}$.
- $Z(GL(n, \mathbb{R})) = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{diag}(t, \dots, t) : \ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.
- $Z(GL(n, \mathbb{C})) = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cdot \mathrm{id} = \{\mathrm{diag}(t, \dots, t) : \ t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$

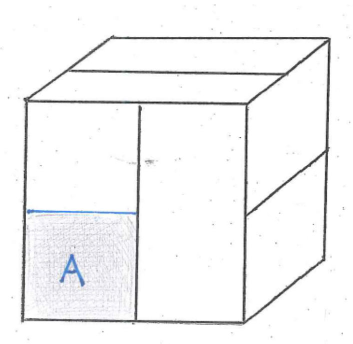
Aufgabe 5 (Pyritoedergruppe T_h)

Sei P der markierte Würfel unten, wobei die Rückseiten die gleichen Streifen haben wie die Vorderseiten. Drücken Sie Sym(P) als Produkt einfacherer Gruppen aus.

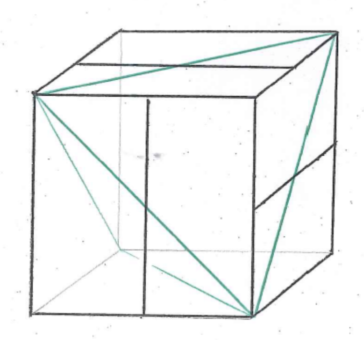


Lösung

Sei A die folgende Region auf P:



Jede Symmetrie von P ist durch das Bild von A bestimmt (Hilfssatz Z) und man sieht, dass für jede andere solche Region B eine Symmetrie von P, die A nach B abbildet, existiert. Es gibt $6 \cdot 4 = 24$ solche Regionen auf P, als $|\mathrm{Sym}(P)| = 24$ (vergleiche mit S02A04). Sei T das folgende Tetraeder:



Jede Symmetrie in $\mathrm{Sym}_+(T)$ ist in $\mathrm{Sym}(P)$. Zudem ist die Punktspiegelung θ auch in $\mathrm{Sym}(P)$ (aber nicht in $\mathrm{Sym}_+(T)$!), so definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Sym}_+(T) \times C_2 &\longrightarrow \mathrm{Sym}(P), \\ (\varphi, \bar{i}) &\longmapsto \theta^i \circ \varphi \end{aligned}$$

ein injektiver Homomorphismus. Da $|\mathrm{Sym}_+(T) \times C_2| = 24$, f ist auch surjektiv. So haben wir gezeigt, dass

$$\mathrm{Sym}(P) \cong \mathrm{Sym}_+(T) \times C_2 \cong A_4 \times C_2$$