Serie 6

Aufgabe 1 (Orbittypen)

Sei $G \times X \longrightarrow X$ eine Gruppenoperation auf eine Menge X.

(i) Zeigen Sie: falls x, y im gleichen Orbit liegen, dann sind ihre Stabilisatoren G_x und G_y konjugiert.

(ii) Zeigen Sie: falls H und G_x konjugiert sind, dann ist H der Stabilisator eines Elements des Orbits von x.

Die Untergruppenkonjugationsklasse $C(x) := \{gG_xg^{-1} : g \in G\} = \{G_y : y \in G \cdot x\}$ nennt man den *Orbittyp* von $x \in X$. Alle Punkte eines Orbits haben den gleichen Orbittyp.

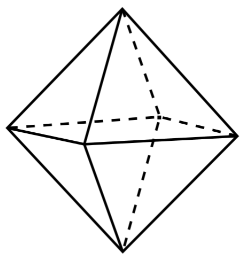
Lösung

(i) Falls $x, y \in X$ im selben Orbit unter der Operation von G auf X liegen, so existiert ein $g \in G$ mit $x = gy$. Wir zeigen: $G_x = gG_yg^{-1}$. Einerseits haben wir $G_x \supseteq gG_yg^{-1}$, da für alle $h \in G_y$ gilt: $ghg^{-1} \cdot x = gh \cdot (g^{-1} \cdot x) = gh \cdot y = g \cdot (h \cdot y) = g \cdot y = x$. Anderseits gilt durch Vertauschen der Rollen von x und y auch $g^{-1}G_xg \subseteq G_y$ und damit $G_x \subseteq gG_yg^{-1}$.

(ii) Es sei $H = gG_xg^{-1} = H$. Wir zeigen: $H = G_{gx}$, wobei gx per Definition im Orbit von $x \in X$ liegt. Einerseits haben wir $H \subseteq G_{gx}$, da für alle $h = gg_xg^{-1}$ in H gilt: $h \cdot gx = gg_xg^{-1}g \cdot x = gg_x \cdot x = gx$. Anderseits gilt für $q \in G_{gx}$: $q \cdot gx = gx$ und damit $g^{-1}qg \cdot x = x$, also $g^{-1}G_{gx}g \subseteq G_x$ und $G_{gx} \subseteq gG_xg^{-1} = H$.

Aufgabe 2 (Orbittypen des Oktaeders)

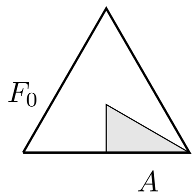
Es bezeichne O das Oktaeder und $\mathrm{Sym}(O)$ seine Symmetriegruppe. Wir wollen alle Orbittypen der Operation von $\mathrm{Sym}(O)$ auf O bestimmen.

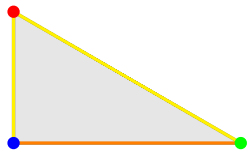


(i) Zeichnen Sie einen Orbit jeden Orbittyps. Wieviel sind es?

(ii) Beschreiben Sie den Stabilisator eines Punktes aus jedem Orbit in Teil (i).

(iii) Kommt jede Untergruppe von $\mathrm{Sym}(O)$ als Symmetriegruppe eines Punktes von O vor?





Lösung

Wir betrachten in dieser Lösung das Oktaheder als Fläche ohne sein Inneres.

(i) Je zwei Punkte in O, die im selben Orbit unter der Operation von $\mathrm{Sym}(O)$ liegen haben denselben Orbittyp gemäß Teil (i) von Aufgabe 1. Wir bestimmen daher zunächst eine Menge von Repräsentanten für die Orbits, d.h. eine Teilmenge von O, die einen Punkt jeden Orbits entält und, sodass keine zwei Punkte aus dieser Menge im selben Orbit liegen. Jeder Orbit enthält einen Repräsentanten in einer gegebenen Seitenfläche F_0 von O, da $\mathrm{Sym}(O)$ *transitiv* auf die Menge der Seitenflächen wirkt (i.e. $\mathrm{Sym}(O)$ kann eine gegebene Seitenfläche auf eine beliebige andere abbilden). Innerhalb F_0 genügt es das unten gezeichnete Sechstel A zu betrachten, dank der Operation von $D_3 \leq \mathrm{Sym}(O)$, die diese Seitenfläche erhält.

Mithilfe von Teil (ii) ergibt sich die nebenstehende Farbkodierung von A nach Orbittyp.

- Der Orbit des roten Eckpunktes von A besteht aus allen 8 Seitenflächenmittelpunkten von O.
- Der Orbit des grünen Eckpunktes von A besteht aus allen 6 Eckpunkten von O.
- Der Orbit des blauen Eckpunktes von A besteht aus allen 12 Kantenmittelpunkten von O.
- Der Orbit eines Punktes von einer der gelben oder der orangenen Seite besteht aus 24 Punkten, einer für jedes Bild der jeweiligen Seite unter den Symmetrien von O.
- Der Orbit eines Punktes aus dem Inneren von A besteht aus $8 \cdot 6 = 48$ Punkten, einer für jedes Bild von A unter einer Symmetrie von O.

(ii)
- Der Stabilisator $\mathrm{stab}_{\mathrm{Sym}(O)}(\textcolor{red}{\bullet})$ des roten Eckpunktes besteht aus die zu $D_3 = S_3$ isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Sym}(O)$, die F_0 erhält.
- Der Stabilisator $\mathrm{stab}_{\mathrm{Sym}(O)}(\textcolor{green}{\bullet})$ des grünen Eckpunktes besteht aus die zu D_4 isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Sym}(O)$, die den grünen Punkt fixiert.

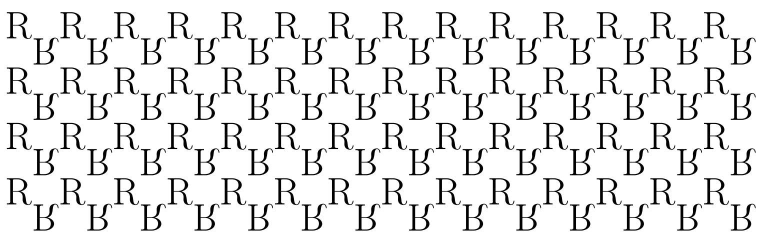
- Es gilt $\mathrm{stab}_{\mathrm{Sym}(O)}(\bullet) \cong C_2 \times C_2$, denn der Stabilisator wird von den Spiegelungen an den beiden Symmetrieebenen von O, die durch $\bullet$ verlaufen, erzeugt.
- Der Stabilisator eines Punktes von einer der gelben oder der organgenen Seite hat Ordnung 2, denn er wird von der Spiegelung an der Symmetrieebene von O durch die entsprechende Seite erzeugt. Die beiden gelben Seiten haben den gleichen Orbittyp: Das gelbe Kantensegment kann etwa durch eine Symmetrie von O etwa auf ein Kantensegment abgebildet werden, dass in der Symmetrieebene des gelben Seitenflächendiagonalsegments liegt. Allerdings wird keiner der Punkte des orangenen Segments durch eine Symmetrie auf einen Punkt in dieser Ebene abgebildet. Daher haben diese Punkte einen anderen Orbittyp.
- Der Stabilisator eines Punktes aus dem Inneren von A ist trivial.

(iii) Nein. Es sei p der Mittelpunkt einer Seitenfläche F, etwa $\bullet$, und s die Symmetrieachse von O orthogonal zu p. Betrachte die Untergruppe H der Ordnung 3 von $\mathrm{Sym}(O)$, die von der Rotation r um s um $120°$ erzeugt wird: $H = \{r, r^2, r^3 = \mathrm{id}\} \cong C_3$. Die einzigen Fixpunkte von H in O sind p und der Mittelpunkt der F gegenüberliegenden Seitenfläche. Der Stabilisator von p in $\mathrm{Sym}(O)$ enthält aber zusätzlich die Spiegelungen an den Symmetrieebenen durch p orthogonal zu F. In der Tat gilt $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(O)}(p) \cong D_3 \gneq H \cong C_3$. Also ist H nicht gleich dem Stabilisator eines Punktes in O.

Eine andere Möglichkeit wäre: $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(O)}(\bullet) \cong D_4 \gneq H \cong C_4$.

Aufgabe 3 (Gruppe der Kleinschen Flasche)

Sei $T_{(m,n)} \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2)$ die Translation der Ebene um den Vektor (m, n). Sei B die Gleitspiegelung $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Sei F die abgebildete Figur, die aus unendlich viel Wiederholungen des Buchstabens R besteht.



(i) Bestimmen Sie $K := \mathrm{Sym}(F)$.

(ii) Verifizieren Sie, dass die Operation von K auf $\mathbb{R}^2$ fixpunktfrei ist.

(iii) Ein *Fundamentalbereich* einer Gruppenoperation auf $\mathbb{R}^n$ is eine abgeschlossene Teilmenge W, die jede Bahn mindestens einmal trifft, aber deren Innere W° jede Bahn höchstens einmal trifft.

Finden Sie einen Fundamentalbereich der Operation von K auf $\mathbb{R}^2$.

(iv) Sei A einer Gruppe, X eine Teilmenge von A. Der *Normalisator* von X in A ist

$$N_A(X) := \{h \in A \mid hXh^{-1} = X\},$$

während der *Zentralisator* von X in A ist

$$Z_A(X) \coloneqq \left\{ h \in A \,\middle|\, hx = xh \text{ für alle } x \in X \right\}.$$

Beide sind Untergruppen von A. Aufgabe: Berechnen Sie $Z_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(K)$ und $N_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(K)$.

Lösung

(i) Sei G die Gruppe, die durch die Translationen $T_{(2m,2n)}$, für $m, n \in \mathbb{Z}$ und die Gleitspiegelung B erzeut ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
T^{-1}_{(2m,2n)} \circ B \circ T_{(2m,2n)}(x,y) &= T_{(-2m,-2n)} \circ B \circ T_{(2m,2n)}(x,y) \\
&= T_{(-2m,-2n)} \circ B(x+2m, y+2n) \\
&= T_{(-2m,-2n)}(x+2m+1, -y-2n) \\
&= (x+1, -y-4n) \\
&= T_{(0,-4n)}(x+1,-y) \\
&= T_{(0,-4n)} \circ B(x,y).
\end{aligned}$$

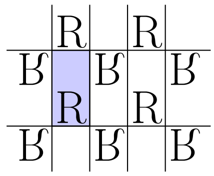
Mit anderen Worten $B \circ T_{(2m,2n)} = T_{(2m2,n)} T_{(0,-4n)} B = T_{(2m,-2n)} B$. Jedes Element von G ist eine Verknüpfung der $T_{(2m,2n)}$, B und B^{-1}. Es gilt $B^2 = T_{(2,0)}$ und daher $B^{-1} = B \circ T_{(-2,0)}$. Es folgt, dass jedes Element von G in der form T oder $T \circ B$ für ein T aus $\{T_{(2m,2n)} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ geschrieben werden kann. Also

$$G = \{T_{(2m,2n)} \; | m, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{T_{(2m,2n)} \circ B \; | m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Wir behaupten, dass $G = K \eqqcolon \mathrm{Sym}(F)$. Da $T_{(2m,2n)}$ und B beide Symmetrien von F sind, gilt es $G \leq K$. Umgekehrt ist jede Symmetrie von F durch das Bild eines beliebigen "R" bestimmt (Hilfssatz Z): sei also $\phi \in \mathrm{Sym}(F)$. Falls $\phi(R)$ nicht "gespiegelt" ist, dann ist $\phi = T_{(2m,2n)}$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ ($2m$ bestimmt die "korrekte Spalte" und $2n$ die "korrekte Zeile"). Falls $\phi(R)$ gespiegelt ist, dann ist $\phi = T_{(2m,2n)} \circ B$ (B spiegelt und bewegt "R" eine Spalte nach rechts, dann bestimmt $2m$ die korrekte Spalte und n die korrekte Zeile). Also $K \leq G$.

(ii) Es folgt aus (i), denn $T_{(2m,2n)}$ und $T_{(2m,2n)} \circ B$ haben keine Fixpunkte.

(iii) Man kann F in einem Gitter so einbetten:



Es folgt aus Teil (i), dass jede Zelle (blau) des Gitters ein Fundamentalbereich für die Operation von K auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(iv) Es folgt aus Teil (i), $T_{(0,2)}^n = T_{(0,2n)}$ und $B^{2m} = T_{(2m,0)}$, dass $K = \langle T_{(0,2)}, B \rangle$. Der Zentralisator besteht aus allen Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die mit $T_{(0,2)}$ und B kommutieren. Falls $A \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ mit B kommutiert, dann

$$B \circ A(x - \text{Achse}) = A \circ B(x - \text{Achse}) = A(x - \text{Achse}).$$

Da B nur die $x-$Achse erhält, folgt es, dass A die x-Achse erhalten muss. Also darf A nur eine 180°-Drehung um einen Punkt auf die x-Achse, eine horizontale Translation oder eine (Gleit-)Spiegelung entlang die x-Achse sein.

Sei $(x, 0)$ auf der x-Achse und R die 180°-Drehung um $(x, 0)$, dann

$$\begin{aligned} R \circ T_{(0,2)} \circ R^{-1}(x,0) &= R \circ T_{(0,2)} R(x,0) \\ &= R \circ T_{(0,2)}(x,0) \\ &= R(x,2) \\ &= (x,-2) \\ &\neq T_{(0,2)}(x,0) \end{aligned}$$

Sei A eine Gleitspiegelung entlang die x-Achse, also $A(x,y) = (x+c, -y)$, für $c \in \mathbb{R}$. Dann $A^{-1}(x,y) = (x-c,-y)$ und

$$\begin{aligned} A \circ T_{(0,2)} \circ A^{-1}(x,y) &= A \circ T_{(0,2)}(x-c,-y) \\ &= A(x-c,-y+2) \\ &= (x, y-2) \\ &\neq T_{(0,2)}(x,y). \end{aligned}$$

Wir haben gerade gezeigt, dass A keine Drehung und keine Gleitspiegelung sein darf, also $Z_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(K) \subset \{T_{(c,0)} | c \in \mathbb{R}\}$. Als $T_{(c,0)}$ mit $T_{(0,2)}$ und B kommutiert schliessen wir, dass

$$Z_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(K) = \{T_{(c,0)} \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Der Normalisator besteht aus allen Isometrien h von $\mathbb{R}^2$ mit $hT_{(0,2)}h^{-1} \in K$ und $hBh^{-1} \in K$. Aus Hilfssatz Y ist jede Isometrie von $\mathbb{R}^2$ der Form $h = T_{(u,v)} \circ A$, für $u, v \in \mathbb{R}$ und $A \in O(2)$.

<u>Fall 1</u>: $A = \mathrm{id}$, i.e. $h = T_{(u,v)}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} hT_{(0,2)}h^{-1}(x,y) &= T_{(u,v)}T_{(0,2)}T_{(-u,-v)}(x,y) \\ &= T_{(u,v)}T_{(0,2)}(x-u, y-v) \\ &= T_{(u,v)}(x-u, y-v+2) \\ &= (x, y+2) \\ &= T_{(0,2)}(x,y). \end{aligned}$$

Also $hT_{(0,2)}h^{-1} = T_{(0,2)} \in K$ und

$$\begin{aligned} hBh^{-1}(x,y) &= T_{(u,v)}BT_{(-u,-v)}(x,y) \\ &= T_{(u,v)}B(x-u, y-v) \\ &= T_{(u,v)}(x-u+1, v-y) \\ &= (x+1, 2v-y) \\ &= T_{(0,2v)}(x+1, -y) \\ &= T_{(0,2v)}B(x,y). \end{aligned}$$

Das heisst $T_{(u,v)}BT_{(-u,-v)} = T_{(0,2v)}B$ und es folgt, dass $T_{(u,v)} \in N_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(F)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{Z}$.

Fall 2: h erhält $(0,0)$. ($(0,0)$ liegt auf dem linken Bein eines "R")

Dann

$$hT_{(0,2)}h^{-1}(0,0) = hT_{(0,2)}(0,0) = h(0,2).$$

Falls $h(0,2)$ nicht in F ist, dann ist $hT_{(0,2)}h^{-1}$ sicher keine Symmetrie von F und so ist h nicht in $N_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(F)$. Sei also $h \in O(2)$ sodass $h(0,2) \in F$. Jede Isometrie, die $(0,0)$ erhält, erhält auch Kreise um $(0,0)$. Die einzige Punkte in F mit Abstand 2 von $(0,0)$ sind $(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)$. Also falls $h \notin D_4$, dann ist $hT_{(0,2)}h^{-1}$ sicher nicht in $N_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(F)$ (wobei D_4 die Symmetriegruppe des Quadrats mit Ecken $(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)$ bezeichnet).

Man kann zeigen, dass $hT_{(0,2)}h^{-1}$ in K für alle $h \in D_4$ ist. Man kann auch zeigen, dass $hBh^{-1} \in K$ nur für $h \in \{\mathrm{id}, s_x, s_y, d_{180^\circ}\}$. Also liegt $h \in O(2)$ in dem Normalisator, nur falls $h \in \{\mathrm{id}, s_x, s_y, d_{180^\circ}\}$.

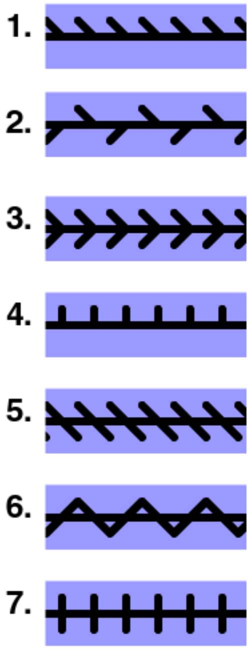
Aus Hilfssatz Y schliessen wir:

$$N_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)}(F) = \{T_{(u,v)} \circ \varphi : \ \varphi \in \{\mathrm{id}, s_x, s_y, d_{180^\circ}\}, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 4 (Friesgruppen)

Ein *Fries* ist eine Figur F in $\mathbb{R}^2$, sodass die Translationsgruppe $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Sym}(F)$ von F gleich $\mathbb{Z}$ ist. Die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(F)$ eines Frieses heisst *Friesgruppe*. Die sieben möglichen Friesgruppen sind durch die unten abgebildeten Friese $F_1, \dots, F_7$ aufgewiesen.[1]

[1] Drawn by Wikipedia user AndrewKepert in Illustrator7, licensed under a CC BY-SA 3.0 license.



Bestimmen Sie eine Zahl $i \in \{1, \dots, 6\}$ mittels Spielwürfel. Beschreiben Sie $\mathrm{Sym}(F_{i+1})$ mithilfe der mathematischen Wortschatz, der Ihnen zur Verfügung steht.

Lösung

(ii) Die Gruppe F_2 besteht aus (ganzzahlige) Translationen $T_{(n,0)}$ und Gleitspiegelungen an einer Achse parallel zur Friesrichtung. $F_2 = \langle T_{(1,0)}, B \rangle = \langle B \rangle$, wobei B die Gleitspiegelung $(x, y) \longmapsto (x + \frac{1}{2}, -y)$ ist.

(iii) Die Gruppe besteht aus Translationen, horizontale Spiegelungen und Gleitspiegelungen. Die Gruppe ist von einer Translation und einer Spiegelung an der horizontale Achse erzeugt. Die Gleitspiegelungen sind durch die Verknüpfung einer Translation und einer Spiegelung erhalten.

Man kann die andere Friesgruppen ähnlicherweise beschreiben.