Lösungen Serie 1

Komplexe Zahlen, komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

1. (a) Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile sowie die Polarkoordinaten von

   (i) $\dfrac{2\sqrt{2}i}{i-1}$,

   (ii) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2018}$,

   (iii) $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \frac{6i-10}{4+i}.$$

Lösung.

(a) (i) Mit den Rechenregeln $|a/b| = |a|/|b|$ sowie $\arg(a/b) = \arg(a) - \arg(b)$ erhalten wir

$$\left|\frac{2\sqrt{2}i}{i-1}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{|i-1|} = 2$$

und

$$\arg\left(\frac{2\sqrt{2}i}{i-1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arg(i-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Folglich ist

$$\frac{2\sqrt{2}i}{i-1} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

(ii) Wegen $|z/\overline{z}| = 1$ erhalten wir für den Bruch

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = e^{2i\arg(1+\sqrt{3}i)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Potenzieren ist nun kein Problem mehr:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2018} = e^{2018\cdot i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(iii) Wir rechnen erst die einzelnen Summanden in Polarkoordinaten um: Es gilt

$$1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}.$$

Wir potenzieren diese Terme, addieren sie und verwenden dann die Exponentialdarstellung des Cosinus:

$$(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = 2^n(e^{i\frac{n\pi}{2}} + e^{-i\frac{n\pi}{2}}) = 2^{n+1}\cos(\tfrac{n\pi}{2}).$$

Dies ist auch bereits die Darstellung in Real- und Imaginärteilen. Für die Polarkoordinaten ergibt dies eine Fallunterscheidung:

$$(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 2^{n+1} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Sowohl der Zähler wie auch der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung haben keine einfach ablesbare Polarkoordinatendarstellung. Wir erweitern den Bruch deshalb mit dem komplex Konjugierten des Nenners:

$$\frac{6i-10}{4+i} = \frac{6i-10}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{34i-34}{17} = 2i-2 = \sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Nach Ziehen der dritten Wurzel erhalten wir damit für $n = 0, 1, 2$ die drei Lösungen

$$z_n = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+n\frac{2\pi}{3})}.$$

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ und betrachten Sie für $z \in \mathbb{C}$ die lineare Gleichung

$$az + b\bar{z} + c = 0.$$

Wann hat diese Gleichung genau eine Lösung?

Lösung. Wir schreiben die Gleichung mit $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $-c = c_1 + ic_2$ und $z = z_1 + iz_2$ um und erhalten

$$(a_1+b_1)z_1 - (a_2-b_2)z_2 + i((a_2+b_2)z_1 + (a_1-b_1)z_2) = c_1 + ic_2.$$

Diese ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & -(a_2-b_2) \\ a_2+b_2 & a_1-b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Also hat die Gleichung genau eine Lösung genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1+b_1 & -(a_2-b_2) \\ a_2+b_2 & a_1-b_1 \end{pmatrix} = a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 \neq 0$$

oder dazu äquivalent: falls $|a| \neq |b|$.

3. Zeigen Sie, dass die Menge K der reellen 2×2-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

mit Matrix-Addition und Matrix-Multiplikation ein Körper ist und zu $\mathbb{C}$ isomorph.

Lösung. Um zu zeigen, dass K ein Körper ist, reicht es zu überprüfen, dass K (i) nicht leer ist, (ii) abgeschlossen unter Addition, additiver Inversion sowie Multiplikation, (iii) die Multiplikation kommutativ ist, und (iv) jedes von Null verschiedene Element ein (multiplikativ) Inverses in K besitzt.

Eine kurze Rechnung bestätigt (i)-(iii). Für (iv) bemerkt man, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2 = 0 \iff (x, y) = (0, 0).$$

Also existiert für jedes von Null verschiedene Element in K die Inverse und sie ist wieder von der gewünschten Form.

Die Abbildung

$$f \colon \mathbb{C} \to K, \quad z \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix}$$

ist bijektiv und ein Körperhomomorphismus, da wieder eine Rechnung zeigt, dass (i) $f(1_{\mathbb{C}}) = 1_K$, (ii) $f(z + w) = f(z) + f(w)$ und (iii) $f(zw) = f(z)f(w)$.

4. Zeigen Sie, dass der (Hauptzweig des) Logarithmus folgende Gleichung erfüllt:

$$\lim_{z \to 1} \frac{\log(z)}{z - 1} = 1$$

Lösung. Wir zeigen die dazu äquivalente Aussage

$$\lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{\log(z)} = 1.$$

Da der Hauptzweig des Logarithmus die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion ist, können wir mit $w := \log(z)$ die linke Seite umschreiben:

$$\lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{\log(z)} = \lim_{w \to 0} \frac{\exp(w) - 1}{w} = \lim_{w \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} - 1}{w} = \lim_{w \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{(k+1)!}$$

Nach Quotienten-Kriterium ist der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{(k+1)!}$ gleich ∞ und somit die Potenzreihe stetig bei 0. Folglich erhalten wir wie gewünscht

$$\lim_{w \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{w \to 0} \frac{w^k}{(k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{w \to 0} \frac{w^k}{(k+1)!} = 1.$$

5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Zeigen Sie: Die Funktion

$$f^*\colon U^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in U\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

ist an der Stelle $\bar{z}_0$ komplex differenzierbar.

Lösung. Die Funktion f^* ist als Verkettung reell differenzierbarer Funktionen auch reell differenzierbar in z_0. Wir müssen somit noch prüfen, ob $\frac{\partial f^*}{\partial x}(\bar{z}_0) + i\frac{\partial f^*}{\partial y}(\bar{z}_0) \equiv 0$ gilt. Wir schreiben $f := u + iv$ und erhalten

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y) =: u^*(x, y) + iv^*(x, y).$$

Beachte, dass $u^* = u \circ (\mathrm{id}, \mu)$ und $v^* = -v \circ (\mathrm{id}, \mu)$ mit $\mu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto -y$. Die Ableitung von (id, μ) an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\mathrm{d}(\mathrm{id}, \mu)(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_x & id_y \\ \mu_x & \mu_y \end{pmatrix}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitungen von u^* und v^* an der Stelle $\bar{z}_0 := x_0 - iy_0$ berechnen wir also mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u^*(x_0, -y_0) &\overset{\text{def}}{=} (u^*_x, u^*_y)(x_0, -y_0) = (u_x, u_y)((\mathrm{id}, \mu)(x_0, -y_0)) \cdot \mathrm{d}(\mathrm{id}, \mu)(x_0, y_0) \\ &= (u_x, u_y)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (u_x, -u_y)(x_0, y_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v^*(x_0, -y_0) &\overset{\text{def}}{=} (v^*_x, v^*_y)(x_0, -y_0) = \\ &= (-v_x, -v_y)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-v_x, v_y)(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Da f an der Stelle z_0 komplex differenzierbar ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in z_0: $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ und $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$. Setzen wir alles zusammen erhalten wir an der Stelle $\bar{z}_0$

$$u^*_x(x_0, -y_0) = u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = v^*_y(x_0, -y_0)$$

und

$$u^*_y(x_0, -y_0) = -u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0) = -v^*_x(x_0, -y_0).$$

Die Funktion f^* erfüllt somit die gewünschten Gleichungen, ist also an der Stelle $\bar{z}_0$ komplex differenzierbar.

6. Seien $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: U \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Zeigen Sie:

   (a) Ist $f(U) \subset \mathbb{R}$, so gilt $f'(z_0) = 0$;

   (b) Ist $f(U) \subset \mathbb{S}^1$, so gilt $f'(z_0) = 0$.
   Hinweis. Sei $X := \mathrm{d}f(z_0)(\mathbb{R}^2)$ das Bild von $\mathrm{d}f(z_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Welche reelle Dimension hat X? Vergleiche X und $J(X)$, wobei $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Matrixdarstellung der Multiplikation mit i ist.

Lösung.

(a) Da f reellwertig ist, verschwinden die partiellen Ableitungen des Imaginärteils an der Stelle z_0. Aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen ergibt sich dadurch, dass auch die partiellen Ableitungen des Realteils an der Stelle z_0 verschwinden müssen. Die Ableitung von f an der Stelle z_0 ist somit 0.

(b) In der Notation des Hinweises zeigen wir zuerst, dass $\dim X \leqslant 1$.
Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_t f(z_0 + tv)|_{t=0} = \mathrm{d}f(z_0)(v).$$

Da das Bild von f in $\mathbb{S}^1$ liegt, gilt für t klein genug auch

$$|f(z_0 + tv)|^2 =< f(z_0 + tv), f(z_0 + tv) >= 1.$$

Leiten wir beide Seiten nach t ab, so erhalten wir mit der Produktregel

$$0 = \partial_t < f(z_0 + tv), f(z_0 + tv) >= 2 < \partial_t f(z_0 + tv), f(z_0 + tv) >$$

und damit an der Stelle $t = 0$:

$$< \mathrm{d}f(z_0)(v), f(z_0) >= 0.$$

Daraus schliessen wir, dass das Bild X im orthogonalen Komplement von $f(z_0)$ liegt, welches Dimension 1 hat. Folglich gilt $\dim X \leqslant 1$.
Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, ist $\mathrm{d}f(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, das heisst es gilt

$$J\mathrm{d}f(z_0) = \mathrm{d}f(z_0)J.$$

Aber dann ist

$$J(X) = J(\mathrm{d}f(z_0)(\mathbb{R}^2)) = \mathrm{d}f(z_0)(J(\mathbb{R}^2)) = \mathrm{d}f(z_0)(\mathbb{R}^2) = X,$$

also ist X invariant unter J. Andererseits ist J auch die Matrixdarstellung der Rotation der Ebene um π, und die einzigen invarianten echten Unterräume sind die 0-dimensionalen. Folglich ist $\dim X = 0$ und der Rang von $\mathrm{d}f(z_0)$ ist ebenfalls 0. Also ist $\mathrm{d}f(z_0) = 0$ und folglich $f'(z_0) = 0$.