Lösungen Serie 10

Logarithmen und n-te Wurzeln

1. Sei log der Hauptzweig des Logarithmus. Für welche $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $n \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Identitäten?

   (a) $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$,

   (b) $\log(z^n) = n \log(z)$,

   (c) $\exp(\log(z)) = z$,

   (d) $\log(\exp(z)) = z$,

   (e) $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

   Lösung.

   (a) Es gilt
   $$\log(zw) = \log(|zw|) + i\arg(zw) = \log(|z|) + \log(|w|) + i\arg(zw),$$
   also ist $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$ genau dann, wenn $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$, d.h. wenn $\arg(z) + \arg(w) \in (-\pi, \pi)$.

   (b) Es gilt
   $$\log(z^k) = \log(|z^k|) + i\arg(z^k) = k\log(|z|) + i\arg(z^k),$$
   also ist $\log(z^k) = k\log(z)$ genau dann, wenn $\arg(z^k) = k\arg(z)$, d.h. wenn $\arg(z) \in (-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k})$.

   (c) Aus Satz 5.2.1 wissen wir, dass exp auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ eine Linksinverse von log ist, d.h. $\exp(\log(z)) = z$ gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   (d) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann ist
   $$\exp(z) = e^x e^{iy} \quad \text{und} \quad \log(\exp(z)) = \log(e^x) + i\arg(e^{iy}) = x + i\arg(e^{iy}),$$
   also ist $\log(\exp(z)) = z$ genau dann, wenn $\arg(e^{iy}) = y$, d.h. wenn $y \in (-\pi, \pi)$. Dies gilt sogar für alle z im Streifen $\{\mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\} \subset \mathbb{C}$.

   (e) Wir haben bereits in der Vorlesung gesehen, dass $\log(z)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Zeigen Sie: Es existiert ein Zweig von $\log f$ auf Ω genau dann, wenn

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1],\Omega)$.

Lösung. Falls ein Zweig g von $\log f$ auf Ω existiert, so ist g nach Satz 5.2.2 und Bemerkung 5.2.2. eine holomorphe Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$ auf Ω, und $\frac{f'}{f}$ ist stetig auf Ω. Das Integral $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ verschwindet folglich für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1],\Omega)$ nach Satz 3.1.1.

Fixiere $z_0 \in \Omega$. Für $z \in \Omega$ sei $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1],\Omega)$ ein beliebiger Weg von z_0 nach z und setze

$$g(z) := \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + c_0$$

für ein noch zu bestimmendes $c_0 \in \mathbb{C}$. Nach Annahme ist g wohldefiniert und holomorph: Sei $\gamma' \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1],\Omega)$ ein weiterer geschlossener Weg von z_0 nach z. Dann gilt für den geschlossenen Weg $\gamma' + \gamma^{-1}$ von z_0 nach z_0

$$0 = \int_{\gamma'+\gamma^{-1}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma'} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z - \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Also ist g wohldefiniert und nach Satz 3.1.1 holomorph mit $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Weiter ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = (\underbrace{f'(z) - f(z)g'(z)}_{=0})e^{-g(z)} = 0.$$

Da Ω offen und zusammenhängend ist, folgt, dass $f(z)e^{-g(z)}$ konstant ist mit $f(z)e^{-g(z)} \equiv f(z_0)e^{-g(z_0)} = f(z_0)e^{-c_0}$. Wähle also c_0 mit $e^{c_0} = f(z_0)$.

3. (a) Seien $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$. Für eine offene und zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$ betrachte

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C},\ z \mapsto (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}.$$

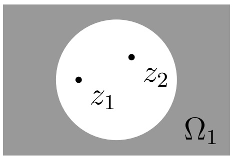
Zeigen Sie, dass ein Zweig von $\log f$ existiert, genau dann, wenn

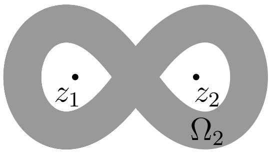
$$m_1 \int_\gamma \frac{1}{z - z_1}\,\mathrm{d}z + \ldots + m_r \int_\gamma \frac{1}{z - z_r}\,\mathrm{d}z = 0,$$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1],\Omega)$.

(b) Entscheiden Sie, ob ein Zweig von $\log f_i$ auf Ω_j existiert für $i, j = 1, 2$ und

(i) $f_1(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, (ii) $f_2(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$.





Lösung.

(a) Die Funktion f ist rational und überall auf Ω definiert, also ist f holomorph. Zudem besitzt f keine Nullstellen in Ω. Somit können wir das Kriterium aus Aufgabe 2 verwenden. Wir berechnen

$$f'(z) = \left((z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}\right)' = \sum_{i=1}^{r} \left(\left((z - z_i)^{m_i}\right)' \prod_{\substack{k=1,\dots,r \\ k \neq i}} (z - z_k)^{m_k} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \left(m_i (z - z_i)^{m_i - 1} \prod_{\substack{k=1,\dots,r \\ k \neq i}} (z - z_k)^{m_k} \right),$$

und damit ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{z - z_i}.$$

Für einen geschlossenen Weg γ in Ω gilt also

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{z - z_i} \right) \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{r} m_i \int_\gamma \frac{1}{z - z_i} \, \mathrm{d}z.$$

Nach Aufgabe 2 existiert ein Zweig von $\log f$ genau dann, wenn für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1], \Omega)$ das Integral $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z$ verschwindet, und hier also dazu äquivalent, wenn $\sum_{i=1}^{r} m_i \int_\gamma \frac{1}{z - z_i} \, \mathrm{d}z = 0$, wie behauptet.

Bemerkung. Die Berechnung von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ kann einfacher und allgemeiner ausgedrückt werden: Sind f und g holomorph auf Ω, dann ist $\frac{(f \cdot g)'(z)}{(f \cdot g)(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$; oder in schickeren Worten, $\partial \log : f \mapsto \frac{f'}{f}$ ist ein Homomorphismus von der multiplikativen Gruppe des Körpers der meromorphen Funktionen auf Ω zur additiven Gruppe meromorpher Funktion auf Ω.

(b) (i) Auf Ω_1: Wir möchten zeigen, dass das Bild von Ω_1 unter f_1 in einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ liegt, mit $1 \in \Omega$. Sei $\tilde{f} \colon \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, $z \mapsto \frac{z - z_1}{z - z_2}$. Dann ist $\tilde{f}$ biholomorph und eine Fortsetzung

von f. Somit ist $f(\Omega_1) = \tilde{f}(\Omega_1) = \bar{\mathbb{C}} \setminus \tilde{f}(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1)$. Sei $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{C} \setminus \Omega_1)$ ein Weg von z_1 nach z_2. Dann ist $\tilde{\gamma} := \tilde{f} \circ \gamma \in C^1([0,1], \tilde{f}(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1))$ ein Weg von $\tilde{f}(z_1) = 0$ to $\tilde{f}(z_2) = \infty$. Folglich ist $\Omega := \bar{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\gamma} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend. Weiter ist $1 \in \Omega$, falls $1 \notin \tilde{\gamma}$. Dies ist in der Tat der Fall, denn $\tilde{\gamma}(t) = 1 \iff \frac{\gamma(t)-z_1}{\gamma(t)-z_2} = 1 \iff \gamma(t) = \infty$. Aber γ ist ein Weg in $\mathbb{C} \setminus \Omega_1 \not\ni \infty$. Nach Satz 5.2.1 existiert ein Zweig des Logarithmus auf Ω. Zudem gilt $\Omega = \bar{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\gamma} \supset \bar{\mathbb{C}} \setminus \tilde{f}(\bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1) = f(\Omega_1)$, also ist die Komposition $\log \circ f$ ein wohldefinierter Zweig von $\log f$.
Auf Ω_2: Sei $r > 0$ so, dass der Rand von $B_r(z_2)$ in Ω_2 liegt. Dann ist

$$I_{\partial B_r(z_2)}(z_2) := \int_{\partial B_r(z_2)} \frac{1}{z - z_2} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \neq 0 = I_{\partial B_r(z_2)}(z_1),$$

also ist $m_1 I_{\partial B_r(z_2)}(z_1) + m_2 I_{\partial B_r(z_2)}(z_2) \neq 0$ und nach Teil (a) existiert kein Zweig von $\log f_1$ auf Ω_2.

(ii) Für $i = 1, 2$ seien $r_i > 0$ mit $\partial B_{r_i}(z_1) \subset \Omega_i$. Auf Ω_1 ist $z_2 \in B_{r_i}(z_1)$ und somit $I_{\partial B_{r_i}(z_1)}(z_1) = 2\pi i = I_{\partial B_{r_i}(z_1)}(z_2)$. Auf Ω_2 ist $z_2 \notin B_{r_i}(z_1)$, also $I_{\partial B_{r_i}(z_1)}(z_1) = 2\pi i \neq 0 = I_{\partial B_{r_i}(z_1)}(z_2)$.
In beiden Fällen gilt folglich $m_1 I_{\partial B_{r_i}(z_2)}(z_1) + m_2 I_{\partial B_{r_i}(z_2)}(z_2) \neq 0$ und es existiert weder auf Ω_1, noch auf Ω_2 ein Zweig von $\log f_2$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und beschränkt und $B \subset \bar{B} \subset \Omega$ ein Ball. Seien $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

für alle $z \in \partial B$. Zeigen Sie, dass f und g in B dieselbe Anzahl von Nullstellen mit Multiplizität besitzen.

Hinweis. Zeigen Sie, dass ein Zweig von $\log \frac{f}{g}$ existiert.

Lösung. Wir bemerken zuerst, dass die Ungleichung insbesondere impliziert, dass weder f noch g auf ∂B eine Nullstelle besitzt. Nach dem Argumentprinzip wollen wir also zeigen, dass

$$\int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \int_{\partial B} \frac{g'(z)}{g(z)} \, \mathrm{d}z.$$

Wegen

$$\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{g}{f} \cdot \frac{f'g - fg'}{g^2} =: \frac{h'}{h}$$

reicht es zu zeigen, dass $\frac{h'}{h}$ eine Stammfunktion H besitzt, die auf ∂B stetig ist. Dann gilt nämlich mit $\gamma \colon [0,1] \to \partial B$ eine Parametrisierung des Randes:

$$\int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \, \mathrm{d}z = \int_{\partial B} \frac{h'(z)}{h(z)} \, \mathrm{d}z = \int_{\partial B} H'(z) \, \mathrm{d}z = H(\gamma(1)) - H(\gamma(0)) = 0.$$

Da f und g auf ∂B holomorph sind und dort keine Nullstellen besitzen, ist die Funktion $h = \frac{f}{g}$ auf ∂B wohldefiniert und stetig. Zudem nimmt h auf ∂B keine Werte in $[0, \infty)$ an: Nimm an, es gäbe $z_0 \in \partial B$ mit $h(z_0) = \lambda \in [0, \infty)$. Dann ist $f(z_0) = \lambda g(z_0)$ und somit

$$|f(z_0) + g(z_0)| = (1 + \lambda) |f(z_0)| = |f(z_0)| + |g(z_0)|$$

– Widerspruch. Also ist für den Zweig des Logarithmus definiert auf $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ die Komposition $\log h$ auf ∂B stetig und eine Stammfunktion von $\frac{h'}{h}$.

5. (a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $f^2 + g^2 \equiv 1$ mit $f, g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz.
   (b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $f \colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine holomorphe n-te Wurzel von f, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $h \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $h(z)^n = f(z)$.
   (c) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, die 0 enthält, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ der 0, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $g_n : U \to \mathbb{C}$ existiert mit $f(z^n) = f(0) + (g_n(z))^n$ für alle $z \in U$.

Lösung.

(a) $f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig) \equiv 1$, also hat keine der beiden ganzen Funktionen $f + ig$ und $f - ig$ einen Nullstelle. Nach a) sei nun h so dass $f + ig = e^h$ und dann $f - ig = e^{-h}$ (weil $f - ig = (f + ig)^{-1}$). Dieses (lineare) Gleichungssystem hat die Lösungen

$$f = \frac{e^h + e^{-h}}{2}, \; g = \frac{e^h - e^{-h}}{2\imath}$$

Also sind alle ganzen Lösungen der Gleichung $f^2 + g^2 \equiv 1$ von der Form

$$f = \cos \circ h, \; g = \sin \circ h$$

für beliebige ganze Funktionen h (dabei haben wir noch rasch h mit $-\imath h$ ersetzt, damit wir cos und sin statt cosh und sinh erhalten – reine Kosmetik).

(b) Nach Satz 5.2.2 existiert ein Zweig von $\log f$ auf Ω, also eine holomorphe Funktion $g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $h_n(z) := e^{\frac{g(z)}{n}}$. Dann ist $h_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $h_n(z)^n = f(z)$ nach Konstruktion.

(c) Sei $0 < \delta < 1$ mit $B_\delta(0) \subset \Omega$. Für jedes $z \in B_\delta(0)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt z^n ebenfalls in $B_\delta(0)$ wegen $|z| < \delta \Rightarrow |z^n| < \delta^n < \delta$.

Fixiere nun $n \in \mathbb{N}$ und betrachte $h(z) := f(z^n)$. Diese Funktion ist holomorph auf $B_\delta(0)$ und ihre ersten $n-1$ Ableitungen verschwinden im Ursprung, denn:

$$\begin{aligned} h'(z) &= nz^{n-1}f'(z^n) \\ h''(z) &= n(n-1)z^{n-2}f'(z^n) + n^2 z^{2n-2} f''(z^n) \\ &\vdots \\ h^{(n-1)}(z) &= n!zf'(z^n) + O(z) \\ h^{(n)}(z) &= n!f'(z^n) + O(z) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass in diesem Prozess erst die n-te Ableitung von h in 0 nicht verschwindet, da nach Annahme $f'(0) \neq 0$ gilt. Um 0 haben wir also

$$h(z) = f(0) + f'(0)z^n + O(z^{n+1}) =: f(0) + z^n g(z)$$

mit $g(0) = f'(0) \neq 0$ holomorph auf $B_\delta(0)$. Also gibt es ein $0 < \varepsilon \leqslant \delta$ so, dass g auf $U := B_\varepsilon(0)$ nicht verschwindet; und U ist einfach zusammenhängend und offen. Nach Teil (b) existiert eine holomorphe n-te Wurzel $\tilde{g}$ von g auf U und wir erhalten

$$h(z) - f(0) = z^n g(z) = (z\tilde{g}(z))^n =: g_n(z).$$

Die Funktion g_n ist auf U holomorph und $f(z^n) = h(z^n) = f(0) + (g_n(z))^n$ für alle $z \in U$, wie gewünscht.

6. Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $\varphi \in C^0(\Omega, \tilde{\Omega})$ heisst *Homöomorphismus*, falls φ bijektiv ist und die Umkehrabbildung φ^{-1} ebenfalls stetig ist. Zeigen Sie:

   Existiert eine Homöomorphismus $\varphi\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$, so ist Ω einfach zusammenhängend genau dann, wenn $\tilde{\Omega}$ einfach zusammenhängend ist.

   Lösung. Behauptung 1. Ω ist wegzusammenhängend genau dann, wenn $\tilde{\Omega}$ wegzusammenhängend ist.

   Nimm an, Ω sei wegzusammenhängend und seien $a, b \in \tilde{\Omega}$, und $z, w \in \Omega$ mit $\varphi(z) = a$ und $\varphi(w) = b$ (existieren, da φ surjektiv ist). Ist γ_0 ein Weg von z nach w, so ist $\varphi \circ \gamma_0$ ein Weg von a nach b, da φ stetig ist. Für die Gegenrichtung ersetze φ mit φ^{-1}.

   Behauptung 2. Zwei Wege γ_0 und γ_1 sind in Ω homotop genau dann, wenn $\tilde{\gamma}_0 := \varphi \circ \gamma_0$ und $\tilde{\gamma}_1 := \varphi \circ \gamma_1$ in $\tilde{\Omega}$ homotop sind.

   Wir zeigen zuerst eine Richtung. Die Gegenrichtung verläuft analog, wieder unter Ersetzen von φ durch φ^{-1}.

Sei γ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 in Ω. Setze $\tilde{\gamma} := \varphi \circ \gamma$. Dann ist $\tilde{\gamma} \in C^0([0,1] \times [0,1], \tilde{\Omega})$. Zudem gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(0,t) &= \tilde{\gamma}_0(t) \quad & \tilde{\gamma}(1,t) &= \tilde{\gamma}_1(t) \\ \tilde{\gamma}(s,0) &= \tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) \quad & \tilde{\gamma}(s,1) &= \tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \end{aligned}$$

Also sind $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$ homotop in $\tilde{\Omega}$.

Zusammen mit Behauptung 1 liefert dies die Aussage.