Lösungen Serie 11

Satz von Jensen, Wachstumsordnung ganzer Funktionen, Satz von Phragmén-Lindelöf, unendliche Produkte

1. Beweisen Sie die Wallissche Produktformel
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdots .$$
Hinweis. Verwenden Sie Eulers Produktformel.

Lösung. Wir wissen aus der Vorlesung (Beispiel 5.3.3), dass
$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$
Mit $z = \frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ erhalten wir
$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)^{-1}$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)^2-1}{(2n)^2}\right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right).$$

2. Sei $f\colon B_1(0)\to\mathbb{C}$ holomorph, beschränkt und nicht konstant gleich Null, und seien $z_1, z_2, \ldots$ die Nullstellen von f. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert
$$\lim_{R\to 1}\int_0^{2\pi}\log\left|f(Re^{i\theta})\right|\,\mathrm{d}\theta$$
existiert, so ist
$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|z_n|) < \infty.$$
Hinweis. Schreiben Sie $1-|z_n| = \int_{|z_n|}^1 \mathrm{d}r$ und schätzen Sie die Partialsummen ab unter Verwendung der Formel von Jensen.

Lösung. Wir können oBdA annehmen, dass $f(0) \neq 0$: Falls doch, ist $f(z) = z^m g(z)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und g holomorph mit $g(0) \neq 0$. Die weiteren Nullstellen von f sind genau die Nullstellen von g.

Sei $N \in \mathbb{N}$ fix und wähle $0 < R < 1$ so, dass $B_R(0)$ die ersten N Nullstellen von f enthält. Setze

$$S_N^R := \sum_{n=1}^{N} (R - |z_n|) = \sum_{n=1}^{N} \int_{|z_n|}^{R} \mathrm{d}r.$$

Sei χ_n^R die charakteristische Funktion des Intervalls $[|z_n|, R]$. Dann ist

$$S_N^R = \int_0^R \sum_{n=1}^{N} \chi_n(r)\, \mathrm{d}r \leqslant \int_0^R n(r)\, \mathrm{d}r,$$

wobei $n(r)$ die Anzahl Nullstellen von f in $B_r(0)$ bezeichnet, mit Multiplizität. Für $r \leqslant R$ ist $n(r) \leqslant \frac{n(r)}{r}$ und damit gilt nach Lemma 5.3.2 und Satz 5.3.1

$$S_N^R \leqslant \int_0^R n(r) \frac{\mathrm{d}r}{r} = \sum_{n=1}^{N} \log\left(\frac{R}{|z_n|}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\theta - \log|f(0)|\,.$$

Da f beschränkt ist, ist auch die rechte Seite dieser Ungleichung beschränkt, und damit auch alle Partialsummen S_N, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(R - |z_n|)$ konvergiert. Da nach Annahme der Grenzwert $\lim_{R\to 1} \int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\theta$ existiert, folgt die Behauptung im Grenzübergang $R \to 1$.

3. Sei S der Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ und sei $F \in C^0(\bar{S}, \mathbb{C})$ holomorph und beschränkt auf S.

   (a) Zeigen Sie: Falls $|F(z)| \leqslant 1$ auf dem Rand, so ist $|F(z)| \leqslant 1$ auf ganz S.
   Hinweis. Wenden Sie das Maximumsprinzip auf $F_\varepsilon(z) := F(z)e^{-\varepsilon(z^2+1)}$ an.

   (b) Sei allgemeiner $M_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x)|$ und $M_1 := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+i)|$. Zeigen Sie: Für $y \in [0,1]$ gilt

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+iy)| \leqslant M_0^{1-y} M_1^y.$$

   Hinweis. Betrachten Sie $M_0^{-iz-1} M_1^{iz} F(z)$ und behandeln Sie den Fall $M_0 = 0$ oder $M_1 = 0$ gesondert.

Lösung.

(a) Sei für $\varepsilon > 0$ wie im Hinweis $F_\varepsilon(z) := F(z)e^{-\varepsilon(z^2+1)}$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist dann

$$|F_\varepsilon(x)| = |F(x)|\, e^{-\varepsilon(x^2+1)} \leqslant |F(x)|\,,$$

mit der Annahme also $|F_\varepsilon(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant 1$.

Ebenfalls unter Verwendung der Annahme gilt

$$|F_\varepsilon(x+i)| = |F(x+i)|\, e^{-\varepsilon x^2} \leqslant |F(x+i)| \leqslant 1.$$

Da F auf S beschränkt ist, existiert zudem ein $C > 0$ so, dass für $y \in (0,1)$:

$$|F_\varepsilon(x+iy)| \leqslant |F(x+iy)|\, e^{-\varepsilon(x^2+1-y^2)} \leqslant Ce^{-\varepsilon x^2},$$

und $Ce^{-\varepsilon x^2}$ geht gleichmässig gegen 0 für $|x| \to \infty$. Also existiert ein $M_\varepsilon > 0$ mit $|F_\varepsilon(x+iy)| \leqslant 1$ für alle x mit $|x| \geqslant M_\varepsilon$. Das Maximumsprinzip angewandt auf $F_\varepsilon|_D$ mit $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \in (0,1) \text{ und } |\operatorname{Re}(z)| < M_\varepsilon\}$ liefert $|F_\varepsilon(x+iy)| \leqslant 1$ auch auf D, also für alle x mit $|x| \leqslant M_\varepsilon$. Insgesamt erhalten wir $|F_\varepsilon(x+iy)| \leqslant 1$ auf S und damit

$$|F(x+iy)| = \underbrace{|F_\varepsilon(x+iy)|}_{\leqslant 1}\, e^{\varepsilon(x^2+1-y^2)} \leqslant e^{\varepsilon x^2}$$

für alle $x + iy \in S$ und alle $\varepsilon > 0$; im Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt

$$|F(z)| \leqslant 1 \quad \text{für alle } z \in S.$$

(b) Sei vorerst $M_0M_1 > 0$ und setze wie im Hinweis $\tilde{F}(z) := M_0^{-iz-1}M_1^{iz}F(z)$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{F}(x)| = |M_0^{-ix-1}M_1^{ix}F(x)| = M_0^{-1}\,|F(x)| \leqslant M_0^{-1} \cdot M_0 = 1$$

sowie

$$|\tilde{F}(x+i)| = |M_0^{-ix}M_1^{ix-1}F(x+i)| = M_1^{-1}\,|F(x+i)| \leqslant M_1^{-1} \cdot M_1 = 1.$$

Mit Teil (a) folgt $|\tilde{F}(z)| \leqslant 1$ auf S und damit für alle $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x+iy)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |M_0^{1-y+ix}M_1^{y-ix}F(x+iy)| \\ &= M_0^{1-y}M_1^{y} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{F}(x+iy)| \leqslant M_0^{1-y}M_1^{y}.\end{aligned}$$

Für $M_0 = 0$ (oder $M_1 = 0$) wiederhole obiges Argument mit M_0 (oder M_1) ersetzt durch $\delta > 0$. Die Behauptung folgt dann im Grenzübergang $\delta \to 0$.

4. Finden Sie die Wachstumsordnung der folgenden ganzen Funktionen.

(a) $p(z)$ ein Polynom, (b) e^{bz^n} mit $b \neq 0$, (c) e^{e^z}.

Lösung.

(a) Schreibe $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ und setze $A := \max\{|a_i| \mid i = 0, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$|p(z)| \leqslant |a_0| + |a_1|\,|z| + \ldots + |a_n|\,|z|^n \leqslant A(1 + |z| + \ldots + |z|^n) \leqslant A(1 + |z|)^n.$$

Beachte, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $1 + |z| = 1^m + (|z|^{\frac{1}{m}})^m \leqslant (1 + |z|^{\frac{1}{m}})^m$. Zudem gilt für alle $r \geqslant 0$ die Ungleichung $(1 + r)^m \leqslant (e^r)^m$. Dies liefert

$$|p(z)| \leqslant A(1 + |z|)^n \leqslant A(1 + |z|^{\frac{1}{m}})^{mn} \leqslant A\left(\exp(|z|^{\frac{1}{m}})\right)^{mn} = A\exp(mn\,|z|^{\frac{1}{m}}).$$

Somit ist die Wachstumsordnung von $p(z)$ gleich $\inf_{m\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{m}\} = 0$.

(b) Schreibe $z = re^{i\theta}$ und $b = se^{i\varphi}$ mit $r \geqslant 0$ und $s > 0$ sowie $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Dann ist $bz^n = sr^n e^{i(\varphi + n\theta)}$ und damit

$$\left|e^{bz^n}\right| = e^{\mathrm{Re}(bz^n)} = e^{sr^n \cos(\varphi + n\theta)} \leqslant e^{sr^n} = e^{|b||z|^n}.$$

Also ist die Wachstumsordnung ρ von e^{bz^n} höchstens n. Wir zeigen, dass $\rho = n$. Nimm an, $\rho < n$. Dann gilt für alle $bz^n = x^n \in \mathbb{R}_{>0}$ und gewisse $A, B > 0$:

$$e^{x^n} = \left|e^{x^n}\right| \leqslant Ae^{Bx^\rho}.$$

Logarithmieren beider Seiten liefert

$$x^n \leqslant \log(A) + Bx^\rho, \quad \text{und dazu äquivalent } 1 \leqslant \frac{\log(A)}{x^n} + B\frac{x^\rho}{x^n}.$$

Da aber für $\rho < n$ beide Terme auf der rechten Seite gegen 0 streben mit $x \to \infty$, gibt es ein x gross genug mit $1 > \frac{\log(A)}{x^n} + B\frac{x^\rho}{x^n}$, Widerspruch. Also ist $\rho = n$.

(c) Wir zeigen, dass e^{e^z} Wachstumsordnung $\rho = \infty$ besitzt. Nimm an, ρ sei endlich. Dann gilt insbesondere für alle $z = x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$e^{e^x} = \left|e^{e^x}\right| \leqslant Ae^{Bx^\rho}$$

für gewisse $A, B > 0$. Logarithmieren und durch e^x teilen liefert

$$1 \leqslant \frac{\log(A)}{e^x} + B\frac{x^\rho}{e^x} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

Widerspruch.

5. Sei $t > 0$ fix und setze

$$F(z) := \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}).$$

Dann ist F eine ganze Funktion. Zeigen Sie:

(a) F hat Wachstumsordnung höchstens 2.

(b) F verschwindet genau dann, wenn $z = m - int$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $n \geqslant 1$.

(c) Für die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots$ von F gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{|z_k|^2} = \infty, \quad \text{aber} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{|z_k|^{2+\varepsilon}} < \infty \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Folgern Sie, dass F Wachstumsordnung 2 besitzt.

Hinweis. Um Teil (a) zu zeigen, schreiben Sie $F(z) = F_1(z)F_2(z)$ mit

$$F_1(z) := \prod_{n=1}^{N}(1 - e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}) \quad \text{und} \quad F_2(z) := \prod_{n=N+1}^{\infty}(1 - e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}).$$

Wählen Sie $N \approx c\,|z|$ mit c gross genug. Dann ist $|F_2(z)| \leqslant A$ wegen

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2\pi nt}\right) e^{2\pi|z|} \leqslant 1.$$

Andererseits gilt für alle $n \leqslant N$:

$$\left|1 - e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}\right| \leqslant 1 + e^{2\pi|z|} \leqslant 2e^{2\pi|z|}.$$

Für Teil (c) verwenden Sie ein Integralkriterium im Zweidimensionalen.

Lösung.

(a) Wir bemerken zuerst, dass F nach Lemma 5.3.3 wohldefiniert und ganz ist, da mit $t > 0$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}\right| = e^{2\pi\,\mathrm{Im}(z)}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi nt} = \frac{e^{-2\pi\,\mathrm{Im}(z)}}{e^{2\pi t} - 1} < \infty.$$

Schreibe also $F(z) = F_1(z)F_2(z)$ wie im Hinweis für N die grösste ganze Zahl mit $Nt - |z| \leqslant \frac{\log(2)}{2\pi}$. Wir wollen $\log|F_2(z)| = \sum_{n=N+1}^{\infty}\log|1 - e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}|$ beidseitig abschätzen. Zunächst bemerken wir, dass mit unserer Wahl von N für alle $n \geqslant N+1$ gilt:

$$\left|e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}\right| < e^{-2\pi Nt}e^{2\pi|z|} \leqslant e^{-2\pi(|z|+\log(2)/2\pi)}e^{2\pi|z|} = \frac{1}{2}.$$

Desweiteren gilt für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2}|w| \leqslant |\log(1-w)| \leqslant 2|w|$$

und somit

$$\frac{1}{2}G(z) \leqslant \log|F_2(z)| \leqslant 2G(z),$$

wobei $G(z) := \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz} = \frac{e^{-2\pi(N+1)t}}{1-e^{-2\pi t}}e^{2\pi iz}$. Nach Maximalität von N gilt zudem

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}} \leqslant |G(z)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-2\pi t}}$$

und damit

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}} \leqslant \log|F_2(z)| \leqslant \frac{1}{1-e^{-2\pi t}};$$

also ist $|F_2(z)| \leqslant A$ für ein $A > 0$. Damit ist die Wachstumsordnung von F höchstens so gross wie diejenige von F_1. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned}
|F_1(z)| &= \prod_{n=1}^{N} \left|1 - e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}\right| \leqslant \left|1 - e^{-2\pi Nt}e^{2\pi iz}\right|^N \\
&\leqslant (1 + e^{-2\pi nt}e^{2\pi|z|})^N \leqslant (1 + e^{2\pi|z|})^N \leqslant 2^N e^{2\pi|z|N} \\
&\leqslant e^{tN(\log(2)+2\pi|z|)} \leqslant e^{2\pi(|z|+\log(2)/2\pi)^2} =: Ce^{c_1|z|+c_2|z|^2}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Wachstumsordnung von F höchstens 2, wie behauptet.

(b) Nach Lemma 5.3.3 verschwindet F bei z_0 genau dann, wenn einer der Faktoren $1 - e^{-2\pi nt}e^{2\pi iz}$ bei z_0 verschwindet. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$2\pi(iz_0 - nt) = 2\pi im \text{ für } m \in \mathbb{Z},$$

und dazu äquivalent, $z_0 = m - int$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $n \geqslant 1$.

(c) Dass $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{|z_k|^{2+\varepsilon}} < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$ ist Satz 5.3.3(ii) mit $\rho = 2 \geqslant \rho_F$. Für Exponent 2 gilt aus Symmetriegründen

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{|z_k|^2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{m^2 + (nt)^2} = 2 \sum_{m\geqslant 0} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{m^2 + (nt)^2}.$$

Zudem ist für $m = 0$ der Term $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(nt)^2}$ endlich. Also reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{m^2 + (nt)^2} = \infty.$$

Betrachte hierzu den Quader $Q_{m,n} := [m, m+1] \times [n, n+1] \subset \mathbb{R}^2$ und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+(ty)^2}$. Dann ist $f \geqslant 0$ und für jedes Paar

$(m,n) \in \mathbb{N}^2$ gilt $\max_{(x,y)\in Q_{m,n}} f(x,y) = f(m,n)$. Für jeden Quader $Q_{m,n}$ folgt mit $\mathrm{vol}(Q_{m,n}) = 1$ die Abschätzung

$$f(m,n) = \mathrm{vol}(Q_{m,n}) f(m,n) \geqslant \int_{Q_{m,n}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

und damit

$$\sum_{m,n\geqslant 1} f(m,n) \geqslant \sum_{m,n\geqslant 1} \int_{Q_{m,n}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \int_1^\infty \int_1^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Mit der Koordinatentransformation $(x,y) \to (r\cos(\theta), r/t\sin(\theta))$ erhalten wir für gewisse $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant 2\pi$ und ein $r_0 > 0$:

$$\sum_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{m^2 + (nt)^2} \geqslant \int_1^\infty \int_1^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_0}^\infty \frac{1}{r^2}\frac{r}{t}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \infty.$$

Damit folgt erneut aus Satz 5.3.3, dass die Wachstumsordnung von F gleich 2 ist.