Lösungen Serie 12

Die Gamma- und Zetafunktionen

1. Seien $a, b > 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)}.$$

   Hinweis. Verwenden Sie Lemma 5.4.1 und zeigen Sie, dass für alle $N \geqslant 1$ die Partialprodukte P_N die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = P_N \cdot \frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{N!\Gamma(a+b+N+1)}.$$

   (b) Verwenden Sie Teil (a), Lemma 5.4.1 und die Produktformel für $\sin(\pi s)$ für einen weiteren Beweis der Identität

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Lösung.

(a) Da $a, b > 0$, gilt $a+1, b+1, a+b+1 > 1$ und somit nach Lemma 5.4.1 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Wir beweisen die Identität im Hinweis per Induktion: Für $N = 1$ gilt wie behauptet

$$\frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b+2)}{\Gamma(a+b+2)} = \frac{(a+1)\Gamma(a+1)(b+1)\Gamma(b+1)}{(a+b+1)\Gamma(a+b+1)} = \frac{1!\,\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{P_1\Gamma(a+b+1)}.$$

Für $N > 1$ gilt mit $P_N = \frac{N(a+b+N)}{(a+N)(b+N)} P_{N-1}$ also nach Induktion

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{\Gamma(a+b+N+1)} &\overset{\text{Lemma 5.4.1}}{=} \frac{(a+N)\Gamma(a+N)(b+N)\Gamma(b+N)}{(a+b+N)\Gamma(a+b+N)} \\
&\overset{\text{IA}}{=} \underbrace{\frac{(a+N)(b+N)}{(a+b+N)}}_{=\frac{NP_{N-1}}{P_N}} \frac{(N-1)!\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{P_{N-1}\Gamma(a+b+1)} \\
&= \frac{N!\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{P_N\Gamma(a+b+1)}.
\end{aligned}$$

Seien nun $a', b' \in \mathbb{Z}$ mit $a' \leqslant a \leqslant a'+1, b' \leqslant b \leqslant b'+1, a'+b' \leqslant a+b < a'+b'+1$. Dann gelten für jedes $N \geqslant 1$ die Abschätzungen

$$\frac{(a'+N+1)!(b'+N+1)!}{N!(a'+b'+N+2)!} \leqslant \frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{N!\Gamma(a+b+N+1)} \leqslant \frac{(a'+N+2)!(b'+N+2)!}{N!(a'+b'+N+1)!}$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir beweisen, dass für alle $c, d \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(c+N)!(d+N)!}{N!(c+d+N)!} = 1.$$

Mit der Stirling-Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ist dies äquivalent dazu, dass der Grenzwert des folgenden Ausdrucks gleich 1 ist:

$$\frac{\sqrt{2\pi(c+N)}\left(\frac{c+N}{e}\right)^{c+N}\sqrt{2\pi(d+N)}\left(\frac{d+N}{e}\right)^{d+N}}{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^{N}\sqrt{2\pi(c+d+N)}\left(\frac{c+d+N}{e}\right)^{c+d+N}}$$

Zuerst formen wir diesen Ausdruck um zu

$$\underbrace{\sqrt{\frac{(c+N)(d+N)}{N(c+d+N)}}}_{\to 1 \quad (N\to\infty)} \cdot \frac{(c+N)^{c+N}(d+N)^{d+N}}{N^N(c+d+N)^{c+d+N}} \cdot \underbrace{\frac{e^N e^{c+d+N}}{e^{c+N}e^{d+N}}}_{=1}.$$

Für den mittleren Faktor gilt

$$\frac{(c+N)^{c+N}(d+N)^{d+N}}{N^N(c+d+N)^{c+d+N}} = \underbrace{\frac{(c+N)^c(d+N)^d}{(c+d+N)^{c+d}}}_{\to 1 \quad (N\to\infty)} \cdot \left(\frac{(c+N)(d+N)}{N(c+d+N)}\right)^N$$

und der letzte Term ist

$$\left(\frac{(c+N)(d+N)}{N(c+d+N)}\right)^N = \left(\frac{cd+(c+d)N+N^2}{(c+d)N+N^2}\right)^N = \left(1+\frac{cd}{(c+d)N+N^2}\right)^N.$$

Für jedes $\alpha > 0$ und N gross genug gilt

$$1 \leqslant \left(1+\frac{cd}{(c+d)N+N^2}\right)^N \leqslant \left(1+\frac{\alpha}{N}\right)^N \to e^\alpha.$$

Grenzübergang $\alpha \to 0$ liefert nun die Behauptung.

(b) Wir bemerken zuerst, dass die Identität in Teil (a) auch für $b > -1$ gilt. Sei $0 < s < 1$ und setze $a = s$ und $b = -s$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s\Gamma(s)\Gamma(1-s) &\overset{\text{Lemma 5.4.1}}{=} \Gamma(s+1)\Gamma(1-s) = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1)} \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+s)(n-s)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} \overset{\text{Produktformel}}{=} \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}. \end{aligned}$$

Da die Singularitäten beider Seiten einfache Pole an denselben Stellen sind, kann die Identität auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

2. Wie Sie aus der Vorlesung wissen, ist die Gammafunktion $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, \mathrm{d}t$ eine für $\mathrm{Re}(s) > 0$, und die Zetafunktion $\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ eine für $\mathrm{Re}(s) > 1$ wohldefinierte holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t.$$

Hinweis. Sei $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 1$. Finden Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und $L > 0$ so, dass die folgenden Ausdrücke $< \varepsilon$ sind:

$$\int_L^\infty e^{-t} t^{\sigma-1}\, \mathrm{d}t \cdot \zeta(\sigma), \quad \int_L^\infty \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}\, \mathrm{d}t, \quad \int_0^\delta e^{-t} t^{\sigma-1}\, \mathrm{d}t \cdot \zeta(\sigma) \quad \text{und} \quad \int_0^\delta \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}\, \mathrm{d}t.$$

Lösung. Wir folgen dem Hinweis. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir bemerken zuerst, dass für alle $0 < \alpha < 1$ eine Konstante $C = C(\alpha, \sigma) > 0$ existiert mit $t^{\sigma-1} \leqslant Ce^{\alpha t}$ für beliebiges σ. Für $L > 0$ gilt somit

$$\int_L^\infty e^{-t} t^{\sigma-1}\, \mathrm{d}t \leqslant C \int_L^\infty e^{-(1-\alpha)t}\, \mathrm{d}t = \frac{C}{1-\alpha} e^{-(1-\alpha)L}.$$

Für $L \to \infty$ strebt der letzte Ausdruck gegen 0, also existiert $L_1 = L_1(\sigma) > 0$ mit

$$\int_L^\infty e^{-t} t^{\sigma-1}\, \mathrm{d}t \cdot \zeta(\sigma) < \varepsilon \quad \text{für alle } L \geqslant L_1$$

Für das zweite Integral bemerken wir, dass $(e^t - 1)^{-1} < e^{-t}$. Damit erhalten wir mit α und C wie oben

$$\int_L^\infty \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}\, \mathrm{d}t < \int_L^\infty e^{-t} t^{\sigma-1}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{C}{1-\alpha} e^{-(1-\alpha)L} \xrightarrow{L\to\infty} 0.$$

Also existiert wie zuvor ein $L_2 = L_2(\sigma) > 0$ mit

$$\int_L^\infty \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}\, \mathrm{d}t < \varepsilon \quad \text{für alle } L \geqslant L_2.$$

Da für $\sigma > 1$ das Integral $\int_0^\delta e^{-t} t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t$ für jedes $\delta > 0$ bei 0 existiert, folgt mit Stetigkeit

$$\int_0^\delta e^{-t} t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\delta\to 0} e^{-t} t^{\sigma-1}|_{t=0} = 0$$

Also existiert ein $\delta_1 = \delta_1(\sigma) > 0$ so, dass

$$\int_0^\delta e^{-t} t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t \cdot \zeta(\sigma) < \varepsilon \quad \text{für alle } 0 < \delta \leqslant \delta_1.$$

Für das letzte Integral bemerken wir, dass $(e^t - 1)/t \to 1$ für $t \to 0$ und somit $(e^t-1)/t < \frac{1}{2}$ für alle t klein genug. Damit erhalten wir für $\sigma > 1$ und $\delta > 0$

$$\int_0^\delta \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta \frac{t^{\sigma-2}}{(e^t-1)/t}\,\mathrm{d}t < 2\int_0^\delta t^{\sigma-2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\delta^{\sigma-1}}{\sigma-1} \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Also existiert ein $\delta_2 = \delta_2(\sigma) > 0$ mit

$$\int_0^\delta \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t < \varepsilon \quad \text{für alle } 0 < \delta \leqslant \delta_2.$$

Setze also $L := \max\{L_1, L_2\}$ und $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ mit $0 < \delta < L$. Dann sind für $\sigma > 1$ alle vier Ausdrücke $< \varepsilon$ wie gewünscht. Nun setzen wir alles zusammen und schätzen ab:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^N n^{-s}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\quad = \left|\int_0^\infty \sum_{n=1}^N n^{-s}e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right| \overset{t\rightsquigarrow nt}{=} \left|\int_0^\infty \sum_{n=1}^N e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\quad \leqslant \underbrace{\left|\int_0^\delta \sum_{n=1}^N e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|\int_L^\infty \sum_{n=1}^N e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|\int_0^\delta \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|\int_L^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right|}_{<\varepsilon} \\
&\qquad + \left|\int_\delta^L \sum_{n=1}^N e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_\delta^L \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\quad < 4\varepsilon + \left|\int_\delta^L \sum_{n=1}^N e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_\delta^L \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right| = 4\varepsilon + \left|\int_\delta^L \sum_{n=N+1}^\infty e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right|,
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile verwendet haben, dass $\sum_{n=1} e^{-nt} \leqslant \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} = (e^t-1)^{-1}$ für alle $N \geqslant 1$. Da die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^\infty e^{-nt}$ für $t \in [\delta, L]$ gleichmässig konvergiert, gilt

$$\lim_{N\to\infty}\left|\int_\delta^L \sum_{n=N+1}^\infty e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_\delta^L \lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^\infty e^{-nt}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right| = 0$$

und somit

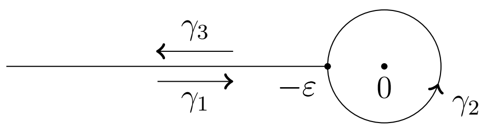
$$\limsup_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} n^{-s}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right| < 4\varepsilon.$$

Im Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ folgt

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} n^{-s}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$$

wie behauptet.

3. Für $0<\varepsilon<2\pi$ betrachten wir den folgenden Weg $\gamma := \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$



mit γ_1 der Weg von $-\infty$ nach $-\varepsilon$, γ_2 der Kreis mit Radius ε um den Ursprung, und γ_3 der Weg von $-\varepsilon$ nach $-\infty$. Wir setzen $z^{s-1} = e^{(s-1)\log z}$ für den Hauptzweig von $\log z$ längs γ_2, für $\log(-e^u) = u-\pi i$ längs γ_1, und $\log(-e^u) = u+\pi i$ längs γ_3, wobei u reell sei. Für $s\in\mathbb{C}$ sei

$$I_\varepsilon(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z.$$

(a) Zeigen Sie, dass I_ε eine ganze Funktion in s ist.

Hinweis. Betrachten Sie die Integrale über γ_j, $j=1,2,3$, einzeln und für $\int_{\gamma_1}\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z$ zunächst das Integral $f_n(s) = \int_{\gamma_1(n)}^{\varepsilon}\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z$, wobei $\gamma_1(n)$ der (endliche) Weg von $-n$ bis $-\varepsilon$ entlang der reellen Achse ist.

(b) Zeigen Sie, dass I_ε nicht von ε abhängt.

Hinweis. Betrachten Sie für $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<2\pi$ fix und $\delta>0$ den Rand der Menge $G_\delta := \{z\in\mathbb{C}\mid |z|\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\}\setminus\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)<0, \mathrm{Im}(z)\in(-\delta,\delta)\}$.

(c) Zeigen Sie: $\int_{\gamma_2}(z^{s-1})(e^{-z}-1)^{-1}\,dz \to 0$ für $\varepsilon\to 0$, falls $\mathrm{Re}(s)>1$ ist.

(d) Verwenden Sie Aufgabe 2, um zu zeigen, dass für $\mathrm{Re}(s)>1$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}\cdot\Gamma(s)\cdot\zeta(s).$$

(e) Zeigen Sie mittels Teil (d), dass $\zeta(s)$ nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar ist, bei $s=0$ holomorph ist, und bestimmen Sie den Wert $\zeta(0)$.

(f) In Teil (e) “berechnen” wir $1 + 1 + 1 + \cdots = \lim_{s\to 0}(1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots) = \zeta(0) = \ldots$. Berechnen Sie sinngemäss “$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$”.

Lösung.

(a) Setze $H_\varepsilon(s) := \int_{\gamma_2} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z$. Wir zeigen, dass H_ε eine ganze Funktion ist. Für $t \in [-\pi, \pi]$ definiere

$$h_t(s) := \begin{cases} \dfrac{i(\varepsilon e^{it})^s}{e^{-\varepsilon e^{it}} - 1}, & t \neq \pm\pi \\ 17 & t = \pm\pi. \end{cases}$$

wobei $(\varepsilon e^{it})^s := e^{s\log(\varepsilon e^{it})}$ für den Hauptzweig von log. Dann ist für jedes $t \in [-\pi, \pi]$ die Funktion $h_t(s)$ eine ganze Funktion, insbesondere stetig auf $\mathbb{C}$. Zudem ist für alle $s \in \mathbb{C}$ die Funktion $t \mapsto h_t(s)$ stetig bis auf die zwei Stellen $t = \pm\pi$ und somit Riemann-integrierbar. Folglich ist auch $H_\varepsilon(s) = \int_{-\pi}^{\pi} h_t(s)\,\mathrm{d}t$ wohldefiniert und stetig auf $\mathbb{C}$.[1] Mit der Holomorphie der h_t gilt zudem für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0, 1], \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \int_\gamma H_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s &= \int_\gamma \int_{-\pi}^{\pi} h_t(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} h_t(\gamma(\tau))\dot\gamma(\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 h_t(\gamma(\tau))\dot\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\int_\gamma h_t(s)\,\mathrm{d}s}_{=0 \text{ nach Cauchy}}\ \mathrm{d}t = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Gleichheit wegen der Kompaktheit der Intervalle $[-\pi, \pi]$ und $[0, 1]$ den Satz von Fubini anwenden durften. Nach Satz 3.1.1 besitzt H_ε folglich eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Stammfunktion und nach Korollar 3.4.1 ist auch die Ableitung H_ε dieser Stammfunktion holomorph auf $\mathbb{C}$.

Sei nun $\gamma_1(n)$ wie im Hinweis der endliche Teilweg entlang γ_1 von $-n$ bis $-\varepsilon$ für ganzzahliges $n > \varepsilon$. Dann ist auch $F_n(s) := \int_{\gamma_1(n)} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z$ ganz: Für $t \in [-n, -\varepsilon]$ setze $f_t(s) := \frac{t^{s-1}}{e^{-t}-1}$, wobei $t^{s-1} = e^{(s-1)(\log(-t)-\pi i)}$ für den reellen Logarithmus. Dann ist jedes $f_t(s)$ wieder ganz und für alle $s \in \mathbb{C}$ ist $t \mapsto f_t(s)$ stetig auf $[-n, -\varepsilon]$. Wie oben folgt Ganzheit von F_n. Analog ist auch $G_n(s) := \int_{\gamma_3(n)} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z$ ganz.

Setze $I_{\varepsilon,n}(s) := F_n(s) + G_n(s)$. Als Summe ganzer Funktionen ist auch $I_{\varepsilon,n}$ für jedes n ganz; und nach Konstruktion konvergiert die Folge $(I_{\varepsilon,n})_n$ gegen $2\pi i I_\varepsilon - H_\varepsilon$. Nun reicht es zu zeigen, dass $(I_{\varepsilon,n})_n$ auf jedem Ball $B_R(0)$

[1] Sei $s_0 \in \mathbb{C}$ und sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt mit $s_0 \in K$. Dann ist $(t, s) \mapsto h_t(s)$ auf $[-\pi, \pi] \times K$ gleichmässig stetig. Also gibt es zu $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|s - s_0| < \delta \Rightarrow |h_t(s) - h_t(s_0)| < \eta$ für alle $s \in K$ und alle $t \in [-\pi, \pi]$ und folglich $|H_\varepsilon(s) - H_\varepsilon(s_0)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} h_t(s) - h_t(s_0)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |h_t(s) - h_t(s_0)|\,\mathrm{d}t < 2\pi\eta$. Also ist H_ε stetig in s_0 und da s_0 beliebig war, ist H_ε stetig auf $\mathbb{C}$.

gleichmässig beschränkt ist. Mit Korollar 3.4.6 folgt dann, dass $2\pi i I_\varepsilon - H_\varepsilon$ und somit auch I_ε ganz ist.

Auf γ_1 und γ_3 gilt $z = -r$ mit $r > \varepsilon$, und es ist $z^{s-1} = r^{s-1} e^{\mp\pi i(s-1)}$, also gilt zu gegebener Konstante $R > 0$ und $s \in B_R(0)$

$$\left|\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\right| = \frac{r^{\operatorname{Re}(s)-1} \cdot e^{\pm\pi \operatorname{Im}(s)}}{e^r - 1} \leqslant \frac{r^{R-1} \cdot e^{\pi R}}{e^r - 1},$$

und somit existiert wie in Aufgabe 2 zu $\alpha \in (0,1)$ ein $C = C(\alpha, R) > 0$ mit

$$|I_{\varepsilon,n}(s)| = \left|\int_{\gamma_1(n)+\gamma_3(n)} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2e^{\pi R} \cdot \int_\varepsilon^\infty \frac{r^{R-1}}{e^r - 1}\,\mathrm{d}r \leqslant \frac{C}{1-\alpha} e^{-(1-\alpha)\varepsilon},$$

und die Folge $(I_{\varepsilon,n})_n$ ist gleichmässig beschränkt auf $B_R(0)$.

(b) Für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 2\pi$ ist $I_{\varepsilon_2}(s) - I_{\varepsilon_1}(s)$ das Integral einer Funktion entlang eines Weges ρ, der sich aus zwei entgegengesetzten Durchläufen des Intervalls $[-\varepsilon_2, -\varepsilon_1]$ und dem Rand R des Kreisrings $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon_1 \leqslant |z| \leqslant \varepsilon_2\}$ zusammensetzt. Diese Funktion ist aber im Kreisring nicht holomorph. Hingegen können wir $\rho = \lim_{\delta\to 0+} \rho_\delta$ schreiben, wobei ρ_δ für $\delta > 0$ der positiv orientierte Rand von G_δ aus dem Hinweis sei. Eingeschränkt auf eine Umgebung des Abschlusses von G_δ ist der Integrand holomorph, also gilt mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$2\pi i(I_{\varepsilon_2}(s) - I_{\varepsilon_1}(s)) = \int_\rho \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z = \lim_{\delta\to 0+} \int_{\rho_\delta} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z = \lim_{\delta\to 0+} 0 = 0.$$

(c) Die Funktion $g(z) := (e^{-z}-1)^{-1}$ ist meromorph auf $|z| < 2\pi$. Der einzige Pol ist einfach und liegt bei $z = 0$, also ist $zg(z)$ holomorph, und somit beschränkt durch eine Konstante $C > 0$. Wir verwenden die Parametrisierung $z = \varepsilon e^{i\varphi}$ von γ_2, mit $-\pi < \varphi < \pi$. Wir setzen $\sigma := \operatorname{Re}(s)$ und $\tau := \operatorname{Im}(s)$, dann gelten $\log(z) = \log(\varepsilon) + i\varphi$ und

$$|z^{s-1}| = |e^{(\sigma-1+i\tau)(\log(\varepsilon)+i\varphi)}| = \varepsilon^{\sigma-1} e^{-\tau\varphi}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} g(z) z^{s-1}\,\mathrm{d}z\right| &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |g(z)| \cdot |z^{s-1}| \varepsilon\,\mathrm{d}\varphi \\
&\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{C}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^{\sigma-1} e^{-\tau\varphi} \cdot \varepsilon\,\mathrm{d}\varphi = C\varepsilon^{\sigma-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\tau\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\leqslant C\varepsilon^{\sigma-1} \cdot 2\pi \cdot e^{\pi|\tau|}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck strebt für $\varepsilon \to 0$ nach 0, da $\sigma > 1$ ist.

(d) Wegen Teilaufgabe c) gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma_1+\gamma_3} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z.$$

Dieser Ausdruck entspricht mittels der Parametrisierungen $z=-r$ von γ_1 und γ_3 dem Ausdruck

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty \frac{r^{s-1}e^{-\pi is}}{e^r-1}\,\mathrm{d}r + \int_0^\infty \frac{r^{s-1}e^{\pi is}}{e^r-1}\,\mathrm{d}r &= 2i\sin(\pi s)\int_0^\infty \frac{r^{s-1}}{e^r-1}\,\mathrm{d}r \\ &= 2i\sin(\pi s)\cdot\Gamma(s)\cdot\zeta(s), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung Aufgabe 2 verwendet. Da nach Teil (b) die Funktion I_ε nicht von ε abhängt, gilt insgesamt also

$$I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2i\sin(\pi s)\cdot\Gamma(s)\cdot\zeta(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}\cdot\Gamma(s)\cdot\zeta(s).$$

(e) Da die Funktion $f(s) := \frac{\sin(\pi s)}{\pi}\Gamma(s)$ aus Teil (d) nur isolierte Nullstellen endlicher Ordung hat, liefert die Definition $\zeta(s) := I_\varepsilon(s)/f(s)$ eine meromorphe Fortsetzung der Zetafunktion auf ganz $\mathbb{C}$. Es gilt

$$\lim_{s\to 0} f(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}\cdot\Gamma(s+1) = 1\cdot\Gamma(1) = 1,$$

und somit ist

$$\zeta(0) = I_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{z^{-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z.$$

Mittels des Residuenkalküls erhalten wir also

$$\zeta(0) = \mathrm{Res}_0\,\frac{1}{z(e^{-z}-1)} = \mathrm{Res}_0\left(-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\dots\right) = -\frac{1}{2}.$$

(f) Mit derselben Argumentation wie in Teil (e) folgt

$$\zeta(-1) = I_\varepsilon(-1) = \mathrm{Res}_0\,\frac{z^{-2}}{e^{-z}-1} = -\frac{1}{12}.$$