Lösungen Serie 13

Der Riemannsche Abbildungssatz

1. Sei $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ die rechte Halbebene und $\Omega_2 := \Omega_1 \cap \mathbb{H}$ der erste Quadrant. Sei weiter Ω_3 der Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-1, 1)\}$ und $\Omega_4 := \Omega_3 \cap \mathbb{H}$. Schliesslich sei $\Omega_5 := \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$. Wir definieren für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ die Funktionen $f_i \colon \Omega_i \to \mathbb{D}$ wie folgt:

$$f_1(z) := \frac{z-1}{z+1}, \quad f_2(z) := \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{z^2-i}{z^2+i}, \quad f_3(z) := \frac{e^{\pi z/2}-1}{e^{\pi z/2}+1},$$

$$f_4(z) := \frac{e^{\pi z}-i}{e^{\pi z}+i}, \quad f_5(z) := \frac{1}{i}\frac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1}.$$

Zeigen Sie, dass diese fünf Abbildungen biholomorph sind. Es gibt für jede dieser Funktionen einen Punkt z_i mit $f_i(z_i) = 0$. Bestimmen Sie jeweils z_i und die Ableitung in diesem Punkt.

Lösung.

(a) f_1 ist eine Möbiustransformation und damit biholomorph. Sie bildet 0 auf -1, $\pm i$ auf $\pm i$, 1 auf 0 und ∞ auf 1 ab. Damit ist das Bild gerade $\mathbb{D}$ und $z_1 = 1$ ist die Nullstelle von f_1. Es gilt $f_1'(z_1) = 1/2$.

(b) f_2 lässt sich mit $g(z) := z^2$ als Verknüpfung von g mit einer Möbiustransformation schreiben. Da $g(\Omega_2) = \mathbb{H}$ und g auf Ω_2 biholomorph ist, müssen wir nur noch die Möbiustransformation $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{z-i}{z+i}$ betrachten: Sie bildet i auf 0, 0 auf $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ± 1 auf $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ und ∞ auf $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ab. Daraus folgt, dass die Möbiustransformation $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ abbildet. Somit ist f_2 auch biholomorph. Der Punkt $z_2 = e^{\pi i/4}$ ist die Nullstelle von f_2 in Ω_2, und $f_2'(z_2) = 1$.

(c) Die Funktion $e^{\pi z/2}$ bildet Ω_3 biholomorph auf Ω_1 ab. Da $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{D}$ biholomorph ist, ist f_3 somit auch biholomorph. Nullstelle von f_3 in Ω_3 ist $z_3 = 0$ und $f_3'(z_3) = \pi/4$.

(d) Die Funktion $e^{\pi z}$ bildet Ω_4 biholomorph auf $\mathbb{H}$ ab. Diese Menge wiederum wird von der Möbiustransformation $\frac{z-i}{z+i}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ abgebildet. Nullstelle von f_4 in Ω_4 ist $z_4 = i/2$ und $f_4'(z_4) = \pi/2$.

(e) Nun zeigen wir, dass $f_5 = f_2 \circ (f_1|_{\Omega_2})^{-1}$ gilt. Dadurch ist f_5 als Verknüpfung biholomorpher Funktionen ebenfalls biholomorph.

Wir rechnen

$$\begin{aligned}(f_2 \circ (f_1|_{\Omega_2})^{-1})(z) &= f_2\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1+z)^2 - i(1-z)^2}{(1+z)^2 + i(1-z)^2} \\ &= \frac{(z+i)^2 + 2 - i((z+i)^2+2)}{(z-i)^2 + 2 + i((z-i)^2+2)} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{(z+i)^2+2}{(z-i)^2+2} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1} = f_5(z).\end{aligned}$$

Es gilt nun $f_5(z_5) = 0 \iff f_1^{-1}(z_5) = z_2 \iff z_5 = f_1(z_2)$ und damit $z_5 = \frac{e^{i\pi/4}-1}{e^{i\pi/4}+1} = i(\sqrt{2}-1)$ sowie $f_5'(z_5) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, einfach zusammenhängend und nicht leer. Weiter seien $z_0 \in \Omega$ reell und $f \colon \Omega \to \mathbb{D}$ die eindeutige biholomorphe Abbildung aus dem Riemannschen Abbildungssatz, mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.

(a) Zeigen Sie mithilfe der Eindeutigkeit von f: Ist Ω symmetrisch bezüglich der reellen Achse, so gilt

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

(b) Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für den Fall, dass Ω bezüglich z_0 punktsymmetrisch ist.

Lösung.

(a) Betrachte die Funktion $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$. Dann ist g eine wohldefinierte Funktion $\Omega \to \mathbb{D}$, da sowohl Ω als auch $\mathbb{D}$ bezüglich der reellen Achse symmetrisch sind; und g ist holomorph nach Serie 1, Aufgabe 5. Für $a \in \Omega$ gilt weiter

$$g'(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{a})}}{z - a} = \overline{\lim_{\bar{z}\to\bar{a}} \left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}}\right)} = \overline{f'(\bar{a})}.$$

Zudem ist g biholomorph mit Inverse $g^{-1}(w) = \overline{f^{-1}(\bar{w})}$, denn für alle $z \in \Omega$ gilt

$$g(z) = w \iff \overline{f(\bar{z})} = w \iff f(\bar{z}) = \bar{w} \iff z = \overline{f^{-1}(\bar{w})}$$

und da f^{-1} holomorph ist, ist es auch g^{-1}, wieder nach Serie 1, Aufgabe 5. Schliesslich gilt

$$g(z_0) = \overline{f(\bar{z}_0)} = \overline{f(z_0)} = \bar{0} = 0$$

sowie

$$g'(z_0) = \overline{f'(\bar{z}_0)} = \overline{f'(z_0)} = f'(z_0) > 0.$$

Das heisst g besitzt alle Eigenschaften der Abbildung aus dem Riemannschen Abbildungssatz, und da diese eindeutig ist, folgt $g = f$ und damit die Behauptung.

(b) Unter der Funktion g in Teil (a) wurde ein Punkt $z \in \Omega$ erst an der reellen Achse gespiegelt, dann unter f nach $\mathbb{D}$ abgebildet und dann wieder an der reellen Achse gespiegelt. Wir behaupten, dass die Analogie darin besteht, dass an z_0 bzw. $f(z_0) = 0$ gespiegelt wird. Genauer sei $z \in \Omega$. Die Spiegelung an 0 ist gegeben durch die Funktion $z \mapsto -\bar{z}$ und jene an z_0 durch $z \mapsto 2z_0 + \bar{z}$. Wir wollen also beweisen, dass

$$\overline{f(z)} = -f(2z_0 - \bar{z}) \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Sei $h(z) := -\overline{f(2z_0 - \bar{z})}$. Mit $2z_0 - \bar{z} = \overline{2z_0 - z}$ und denselben Argumenten wie in Teil (a) sehen wir, dass h als Komposition biholomorpher Funktionen biholomorph ist und Ω nach $\mathbb{D}$ abbildet. Ebenfalls aus Teil (a) wissen wir, dass $\left(\overline{f(\bar{z})}\right)' = \overline{f'(\bar{z})}$. Mit der Kettenregel erhalten wir damit $h'(z) = \overline{f'(2z_0 - \bar{z})}$. Schliesslich gilt

$$h(z_0) = -\overline{f(2z_0 - \bar{z}_0)} = -\overline{f(z_0)} = 0$$

und

$$h'(z_0) = \overline{f'(z_0)} = f'(z_0) > 0.$$

Wie in Teil (a) folgt, dass $h = f$ und damit die Behauptung.

3. Zeigen Sie, dass der Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0, |\operatorname{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ unter der Funktion $f(z) := \sin(z)$ biholomorph auf die obere Halbebene abgebildet wird. Untersuchen Sie zudem das Verhalten von f auf dem Rand des Streifens.

Hinweis. Die Funktion f lässt sich als Komposition der Abbildungen $z \mapsto e^{iz}$, $z \mapsto iz$ und $z \mapsto -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ schreiben; und $z \mapsto e^{iz}$ bildet den Streifen S auf die Halbkreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0, |z| < 1\}$ ab.

Lösung. Wie im Hinweis behauptet, wird S unter $z \mapsto e^{iz}$ auf die rechte Halbkreisscheibe $\mathbb{D}^+$ mit Radius 1 abgebildet: Für $z \in S$ ist $\operatorname{Re}(e^{iz}) = e^{-\operatorname{Im} z} \cos(\operatorname{Re}(z)) > 0$ und $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} < 1$, und wegen $\operatorname{Re}(z) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $z \mapsto e^{iz}$ auf S injektiv. Zudem ist $w \mapsto -i \log(w)$ auf $\mathbb{D}^+$ eine holomorphe Umkehrfunktion, also ist die Abbildung biholomorph.

Die Abbildung $z \mapsto iz$ ist eine Rotation um $\frac{\pi}{2}$, insbesondere biholomorph; und das Bild von $\mathbb{D}^+$ unter dieser Abbildung ist die Halbkreisscheibe $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$.

Schliesslich wird $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ unter $g(z) = -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ auf die obere Halbebene abgebildet: Für $r \in (0,1)$ und $\theta \in (0, \pi)$ ist $\sin(\theta) \in (0,1)$ und $\cos(\theta) \in (-1,1)$, und $\frac{1}{r} \pm r \in (0, \infty)$. Somit ist der Imaginärteil von $g(re^{i\theta}) = -(\frac{1}{r} + r)\cos(\theta) + i(\frac{1}{r} - r)\sin(\theta)$ in $(0, \infty)$ und der Realteil in $\mathbb{R}$. Für $w \in \mathbb{H}$ gilt zudem $w = g(z) \Leftrightarrow z^2 + 2wz + 1 = 0$.

Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen genau dann, wenn $w \neq \pm 1$. Da $-1 \notin \mathbb{H}$, ist dies nur für $w = 1$ möglich. Aber dann ist von den möglichen Lösungen $z = \pm 1$ nur $z = 1$ in $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$. Also ist g bijektiv, mit $g^{-1}(w) = (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + w$ für einen Zweig von log. Somit ist g biholomorph, und folglich auch f als Komposition biholomorpher Funktionen.

Auf den Randstrahlen $\mathrm{Re}(z) = \pm\frac{\pi}{2}$ ist $f(z) = \pm \cosh(\mathrm{Im}\, z)$; wandert dort also $\mathrm{Im}\, z$ von 0 nach ∞, so bewegt sich $f(z)$ von ± 1 nach $\pm\infty$ entlang der reellen Achse. Auf dem Randsegment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ auf der reellen Achse wandert $f(z) = \sin(\mathrm{Re}(z))$ von -1 bis 1 ebenfalls entlang der reellen Achse. Insgesamt wird der Rand von S stetig auf den Rand von $\mathbb{H}$ abgebildet.

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k$ beschränkt sind. Zeigen Sie, dass die Dirichlet Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$ konvergiert und dort eine holomorphe Funktion definiert.

Hinweis. Für $n \geqslant 1$ sei $A_n := a_1 + \ldots + a_n$. Betrachten Sie die Partialsummen der (absolut konvergenten) Reihe $\sum A_n(n^{-s} - (n+1)^{-s})$ und leiten Sie eine Beziehung zu den analogen Partialsummen der Dirichlet-Reihe her. Der Mittelwertsatz liefert eine Abschätzung für den Term $n^{-s} - (n+1)^{-s}$. Um zu beweisen, dass die Reihe eine holomorphe Funktion definiert, zeigen Sie, dass die Partialsummen auf jeder kompakten Teilmenge der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ gleichmässig konvergieren.

Lösung. Wir folgen dem Hinweis. Mit Abel-Summation erhalten wir für $N \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} &= \frac{1}{N^s}\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1}\left(\left((n+1)^{-s} - n^{-s}\right)\sum_{m=1}^{n} a_m\right) \\ &= \frac{A_N}{N^s} + \sum_{n=1}^{N-1} A_n(n^{-s} - (n+1)^{-s}).\end{aligned}$$

Für die Funktion $f(x) = 1/x^s$ liefert der Mittelwertsatz für ein $x_0 \in [n, n+1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|n^{-s} - (n+1)^{-s}\right| &= |f(n+1) - f(n)| \\ &= |f'(x_0)|\,|(n+1) - n| = \frac{|s|}{x_0^{\mathrm{Re}(s)+1}} \leqslant \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}\end{aligned}$$

Zudem sind die Partialsummen A_n nach Annahme beschränkt, also erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}\right| &\leqslant \left|\frac{A_N}{N^s}\right| + \sum_{n=1}^{N-1} |A_n| \left|(n^{-s} - (n+1)^{-s})\right| \\ &\leqslant M \left(\frac{1}{N^s} + |s| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)+1}}\right)\end{aligned}$$

Da $\operatorname{Re}(s) > 0$, gilt $\frac{A_N}{N^s} \to 0$ für $N \to \infty$ und der letzte Ausdruck konvergiert für $N \to \infty$.

Zur Gleichmässigkeit der Konvergenz auf kompakten Teilmengen: Es reicht, dies auf abgeschlossenen Halbkreisscheiben $B_{\delta,R} := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geqslant \delta, |s| \leqslant R\}$ zu zeigen, mit $\delta, R > 0$. Seien also $N_2 \geqslant N_1 \geqslant 1$. Wieder mit Abel-Summation haben wir

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A_{N_2}}{N_2^s} - \frac{A_{N_1-1}}{N_1} + \sum_{n=N_1}^{N_2-1} A_n(n^{-s} - (n+1)^{-s})$$

und folglich mit $N^{-\operatorname{Re}(s)} \leqslant N^{-\delta}$, sowie $|n^{-s} - (n+1)^{-s}| \leqslant |s|\, n^{-(\operatorname{Re}(s)+1)}$ und $|A_n| \leqslant M$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sup_{s \in B_{\delta,R}} \left|\sum_{n=1}^{N_2} \frac{a_n}{n^s} - \sum_{n=1}^{N_1} \frac{a_n}{n^s}\right| &= \sup_{s \in B_{\delta,R}} \left|\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{a_n}{n^s}\right| \\ &\leqslant M \cdot \sup_{s \in B_{\delta,R}} \left(N_2^{-\operatorname{Re}(s)} + N_1^{-\operatorname{Re}(s)} + |s| \sum_{n=N_1}^{N_2-1} n^{-(\operatorname{Re}(s)+1)}\right) \\ &\leqslant M \cdot \left(N_2^{-\delta} + N_1^{-\delta} + R \sum_{n=N_1}^{N_2-1} n^{-(\delta+1)}\right) \xrightarrow{N_1 \to \infty} 0.\end{aligned}$$

Da die Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}$ offensichtlich (auf ganz $\mathbb{C}$) holomorphe Funktionen $f_N(s)$ definieren, die in der Halbebene $\{\operatorname{Re}(s) > 0\}$ kompakt gleichmässig gegen eine wohldefinierte Funktion $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ konvergieren, folgt mit Korollar 3.4.6, dass f ebenfalls holomorph ist.

Keine Abgabe!