Lösungen Serie 2

Möbiustransformationen, analytische und holomorphe Funktionen, harmonische Funktionen

1. Sei $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ drei verschiedene Punkte.

   (a) Finden Sie eine Möbiustransformation $\varphi := \varphi_{z_0,z_1,z_2} \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, so dass

   $$\varphi(z_0) = 0, \qquad \varphi(z_1) = 1, \qquad \varphi(z_2) = \infty.$$

   (b) Für ein weiteres $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ definieren wir das Doppelverhältnis der vier Punkte:

   $$w(z_0, z_1, z_2, z_3) := \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_3).$$

   Zeigen Sie, dass für jede weitere Möbiustransformation $\psi \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ gilt:

   $$w(\psi(z_0), \psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3)) = w(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

Lösung.

(a) Eine Möbiustransformation hat die Form $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Seien vorerst $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Aus $\varphi(z_0) = 0$ folgt $az_0 + b = 0$, also $b = -az_0$. Weiter folgt aus $\varphi(z_1) = 1$, dass $az_1 + b = cz_1 + d$, also $a = \frac{cz_1+d}{z_1-z_0}$ und somit $b = -z_0 \frac{cz_1+d}{z_1-z_0}$. Schliesslich folgt aus $\varphi(z_2) = \infty$, dass $cz_2 + d = 0$, also $d = -cz_2$. Wir setzen alles ein und erhalten

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{cz_1-cz_2}{z_1-z_0} z - z_0 \frac{cz_1-cz_2}{z_1-z_0}}{cz - cz_2} = \frac{(z-z_0)(z_1-z_2)}{(z-z_2)(z_1-z_0)}.$$

Falls $z_i = \infty$ für ein $i \in \{0, 1, 2\}$, geht man analog vor. Das Ergebnis ist für $i = 0, 1, 2$ jeweils

$$\frac{z_1 - z_2}{z - z_2}, \qquad \frac{z - z_0}{z - z_2}, \qquad \frac{z - z_0}{z_1 - z_0},$$

was dasselbe ist wie $\lim\limits_{z_i \to \infty} \dfrac{(z-z_0)(z_1-z_2)}{(z-z_2)(z_1-z_0)}$.

(b) Sei nun $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Für 2 verschiedene z_k, z_l gilt

$$\psi(z_k) - \psi(z_l) = \frac{(ad-bc)(z_k - z_l)}{(cz_k + d)(cz_l + d)}.$$

Dann ist der Zähler von $w(\psi(z_0), \psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3))$

$$(\psi(z_3) - \psi(z_0))(\psi(z_1) - \psi(z_2)) = \frac{(ad - bc)^2(z_3 - z_0)(z_1 - z_2)}{(cz_0 + d)(cz_1 + d)(cz_2 + d)(cz_3 + d)}.$$

Analog für den Nenner:

$$(\psi(z_3) - \psi(z_2))(\psi(z_1) - \psi(z_0)) = \frac{(ad - bc)^2(z_3 - z_2)(z_1 - z_0)}{(cz_0 + d)(cz_1 + d)(cz_2 + d)(cz_3 + d)}.$$

Durch Dividieren folgt die Behauptung.

2. (a) Zeigen Sie, dass für eine Möbiustransformation $\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ das Urbild der reellen Gerade $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann auch eine Gerade ist, wenn $a\bar{c} = \bar{a}c$. Zeigen Sie desweiteren, dass andernfalls das Urbild von $\overline{\mathbb{R}}$ ein Kreis ist.
   (b) Folgern Sie, dass z_0, z_1, z_2, z_3 genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden liegen, wenn ihr Doppelverhältnis $w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ reell ist.
   (c) Folgern Sie weiter, dass jede Möbiustransformation jede Gerade und jeden Kreis wiederum auf eine Gerade oder einen Kreis abbildet.

Lösung.

(a) Sei z so, dass $\varphi(z) \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\varphi(z) = \overline{\varphi(z)}$, also

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\overline{az} + \bar{b}}{\overline{cz} + \bar{d}}.$$

Wir schreiben dies als quadratische Gleichung in z:

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|z|^2 + (a\bar{d} - \bar{b}c)z - (\bar{a}d - b\bar{c})\bar{z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0.$$

Sei nun $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$. Es gilt $a\bar{d} - \bar{b}c = 0 \iff \overline{a\bar{d} - \bar{b}c} = \bar{a}d - b\bar{c} = 0$. Falls $a\bar{d} - \bar{b}c = 0$, ist aber die Gleichung $b\bar{d} - \bar{b}d = 0$ unabhängig von z und folglich das Urbild von $\mathbb{R}$ unter φ ganz $\mathbb{C}$. Dies widerspricht der Biholomorphie von $\varphi\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Also ist $a\bar{d} - \bar{b}c \neq 0$ und z erfüllt eine Geradengleichung.

Andernfalls ist $a\bar{c} - \bar{a}c \neq 0$ und die quadratische Gleichung ist äquivalent zu

$$\left| z - \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{\bar{a}c - a\bar{c}} \right| = \left| \frac{ad - bc}{\bar{a}c - a\bar{c}} \right|.$$

Dies ist eine Kreisgleichung. Schliesslich lässt sich leicht überprüfen, dass auch $z = -\frac{d}{c}$ die quadratische und folglich auch die Geraden- bzw. Kreisgleichung erfüllt.

(b) Nach Konstruktion gilt $\varphi(z_i) \in \overline{\mathbb{R}}$ für $i = 0, 1, 2$. Nach Teil (a) liegen also z_0, z_1 und z_2 alle auf derselben Gerade oder Kreislinie gegeben durch $\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{R}})$, und dieser geometrische Ort ist durch die drei Punkte z_0, z_1 und z_2 eindeutig bestimmt. Da $\varphi(z_3) \neq \varphi(z_i)$ für $i = 0, 1, 2$, ist $\varphi(z_3) \neq \infty$. Wieder nach Teil (a) liegt also auch z_3 auf dieser Gerade oder Kreislinie genau dann, wenn $\varphi(z_3) =: w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ reell ist.

(c) Sei ψ eine Möbiustransformation und z_0, z_1, z_2, z_3 vier verschiedene Punkte auf einem Kreis oder einer Geraden. Dann ist $w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ nach Teil (b) reell. Gleichzeitig wissen wir aus Aufgabe 1 (b), dass

$$w(\psi(z_0), \psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3)) = w(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}.$$

Damit liegen die 4 Punkte auch unter der Abbildung ψ auf einem Kreis oder einer Geraden.

3. (a) Leiten Sie die Polarform der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen her:

$$\partial_r u = \frac{1}{r}\partial_\vartheta v, \qquad \partial_\vartheta u = -r\partial_r v.$$

(b) Verwenden Sie diese Gleichungen, um direkt zu zeigen, dass der Hauptzweig des Logarithmus

$$\log\colon \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\} \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \quad z \mapsto \log|z| + i \arg z$$

holomorph ist.

Lösung.

(a) Schreibe $u_r := \partial_r u$ und $u_\vartheta := \partial_\vartheta u$ und analog für v. Wir haben

$$u(x, y) = u(r\cos\vartheta,\, r\sin\vartheta) \quad \text{und} \quad v(x, y) = v(r\cos\vartheta,\, r\sin\vartheta).$$

Dann gilt nach der Kettenregel für u:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -r\sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}.$$

Analog gilt für v:

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -r\sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Wir invertieren die Matrix und erhalten:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\frac{1}{r}\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \frac{1}{r}\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\vartheta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\frac{1}{r}\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \frac{1}{r}\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\vartheta \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen und den Cauchy-Riemannschen in Normalform

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

folgt, dass:

$$\cos\vartheta u_r - \frac{1}{r}\sin\vartheta u_\vartheta = u_x = v_y = \sin\vartheta v_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta v_\vartheta \qquad \text{(I);}$$

$$\sin\vartheta u_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta u_\vartheta = u_y = -v_x = -\cos\vartheta v_r + \frac{1}{r}\sin\vartheta v_\vartheta \qquad \text{(II).}$$

Wenn man (I) mit $-r\sin\vartheta$ und (II) mit $r\cos\vartheta$ multipliziert und die Resultate addiert, erhält man

$$u_\vartheta = -rv_r.$$

Multipliziert man andererseits (I) mit $\cos\vartheta$ und (II) mit $\sin\vartheta$ und addiert man die Resultate, so erhält man

$$u_r = \frac{1}{r}v_\vartheta.$$

Diese sind die gesuchten Differentialgleichungen. Es lässt sich nach Einsetzen in die Gleichungen oben überprüfen, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Normalform aus ihnen folgen.

(b) Schreibe $z = re^{i\vartheta}$. Dann ist $\log(z) =: u(r,\vartheta) + iv(r,\vartheta) = \binom{\log(r)}{\vartheta}$ reell differenzierbar auf $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\}$, da komponentenweise, und es gilt

$$\frac{\partial \log}{\partial r}(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \log}{\partial \vartheta}(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist $u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}v_\vartheta$ und $u_\vartheta = 0 = -rv_r$, also erfüllt log die Cauchy-Riemmanschen Differentialgleichungen und ist somit analytisch auf Ω. Da die Ableitung $z \mapsto \log'(z) = \frac{1}{z}$ zudem stetig ist auf Ω, ist log dort holomorph.

4. Welche dieser Funktionen können Realteil einer analytischen Funktion auf $\mathbb{C}$ sein? Geben Sie diese gegebenenfalls an:

   (a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$

   (b) $u(x, y) = e^x \sin(y)$

   (c) $u(x, y) = e^x \sinh(y)$

   Lösung.

   (a) Um eine analytische Funktion $f = u + vi$ zu finden mit Realteil $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$, wollen wir die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen verwenden. In der Tat wissen wir dann über die Funktion v, dass

   $$v_x = -u_y = 6xy, \qquad \text{und} \qquad v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2.$$

   Nehmen wir die untere Gleichung und integrieren nach y so ergibt sich

   $$v = 3x^2y - y^3 + g(x)$$

   für eine differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um auch g zu bestimmen, setzen wir nun in die erste Gleichung ein und erhalten

   $$v_x = 6xy + g'(x) \stackrel{!}{=} 6xy.$$

   Also muss $g'(x) = 0$ sein und damit $g(x) = c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann aber erfüllt $v = 3x^2y - y^3 + c$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist reell differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$. Also sind genau die Funktionen

   $$f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + 1 + i(3x^2y - y^3 + c) = (x + iy)^3 + 1 + ci$$

   analytisch auf $\mathbb{C}$ mit Realteil u.

   (b) Analog wie oben sehen wir

   $$v_x = -u_y = -e^x \cos(y), \qquad \text{und} \qquad v_y = u_x = e^x \sin(y).$$

   Wir erhalten $v(x, y) = -e^x \cos(y) + g(x)$ und durch Einsetzen $g'(x) = 0$. Damit ergibt sich also

   $$f(x + iy) = e^x \sin(y) - ie^x \cos(y) - ci = -i(e^{x+iy} + c).$$

   (c) Der Realteil einer analytischen Funktion muss harmonisch sein. Hier gilt aber:

   $$u_{xx} + u_{yy} = e^x \sinh(y) + e^x \sinh(y) \neq 0.$$

   Also verschwindet Δu auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ und damit existiert keine Funktion f, die analytisch auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist mit Realteil u.

5. Seien $u \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ harmonisch und $f \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ holomorph. Zeigen Sie: $u \circ f$ ist harmonisch.

   Lösung. Da die Eigenschaft einer Funktion, harmonisch zu sein, eine lokale ist, können wir annehmen: u ist (lokal) Realteil einer holomorphen Funktion h. Dann ist $u \circ f$ als Realteil $\mathrm{Re}(h \circ f)$ der holomorphen Funktion $h \circ f$ harmonisch.

   Alternativ lässt sich die Aufgabe auch rein rechnerisch lösen: Wir schreiben φ statt u, damit wir $f = u + iv$ notieren können. Mit der Kettenregel folgt $\partial_x(\varphi \circ f) = \mathrm{d}\varphi \cdot \partial_x f = \mathrm{d}\varphi \cdot \left(\begin{smallmatrix} u_x \\ v_x \end{smallmatrix}\right)$ und $\partial_y(\varphi \circ f) = \mathrm{d}\varphi \cdot \partial_y f = \mathrm{d}\varphi \cdot \left(\begin{smallmatrix} u_y \\ v_y \end{smallmatrix}\right)$. Ketten- und Produktregel wiederholt angewendet liefert

$$\Delta(\varphi \circ f) = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \mathrm{H}_\varphi \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + \mathrm{d}\varphi \cdot \begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \mathrm{H}_\varphi \cdot \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} + \mathrm{d}\varphi \cdot \begin{pmatrix} u_{yy} \\ v_{yy} \end{pmatrix}$$

   wobei H_φ die Hesse-Matrix von φ bezeichnet. Da u und v als Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonisch sind, folgt

$$\mathrm{d}\varphi \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_{xx} + u_{yy} \\ v_{xx} + v_{yy} \end{pmatrix}}_{=0} = 0$$

   Wendet man nun in den verbleibenden zwei Termen von H_φ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen an, so erhält man

$$\Delta(\varphi \circ f) = (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})(u_x^2 + u_y^2) = ((\Delta\varphi) \circ f)\, |f'|^2 .$$

   (Bemerkung: wir haben bisher nicht verwendet, dass φ harmonisch ist, die Formel gilt also für beliebige φ der Klasse C^2 und holomorphe f.) Nun sehen wir:

$$\Delta\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta(\varphi \circ f) = 0.$$