Lösungen Serie 3

Kurvenintegrale, Satz von Goursat

1. Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_\gamma f(z)dz$ für folgende Funktionen f und Wege $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$:

   (a) $f(z) = e^z$ und $\gamma\colon t \mapsto 3e^{\pi i t}$,

   (b) $f(z) = \overline{z}$ und $\gamma\colon t \mapsto \frac{1}{t+1} + 2it$,

   (c) $f(z) = \cos(\mathrm{Re}(z))$ und $\gamma\colon t \mapsto i + e^{2\pi i t}$,

   (d) $f(z) = \sin(z)$ und $\gamma\colon t \mapsto t + it$,

   (e) $f(z) = e^{\sin(z)}z^{-1}$ und γ eine Parametrisierung des Rands eines beliebigen konvexen Polygons in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   Lösung.

   (a) Mit der Substitution $x = \pi t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^\pi e^{3e^{ix}} 3ie^{ix}dx \\ &= \int_0^\pi 3\big(e^{e^{ix}}\big)^2 e^{e^{ix}} ie^{ix}dx \\ &= \big(e^{e^{ix}}\big)^3\Big|_0^\pi = e^{-3} - e^3.\end{aligned}$$

   Dies ist dasselbe Ergebnis wie für die übliche Integration entlang der reellen Achse von 3 bis -3 (Start- und Endpunkt von γ). Dies ist natürlich kein Zufall.

   (b) Wir berechnen direkt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - 2it\right)\left(\frac{-1}{(t+1)^2} + 2i\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{(t+1)^3} + 4t\right)dt + i\int_0^1 \frac{4t+2}{(t+1)^2}dt \\ &= \frac{1}{2(t+1)^2}\Big|_0^1 + 2t^2\Big|_0^1 + i\left(4\log(t+1) + \frac{2}{t+1}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{13}{8} + i(4\log(2) - 1).\end{aligned}$$

(c) Mit der Substitution $x = 2\pi t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} \cos(\mathrm{Re}(i+e^{ix}))ie^{ix}dx = i\int_0^{2\pi} \cos(\cos(x))e^{ix}dx \\
&= i\int_0^{2\pi} \cos(\cos(x))\cos(x)dx - \int_0^{2\pi} \cos(\cos(x))\sin(x)dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos(x))\cos(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\cos(x))\cos(x)dx \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\cos(x))\sin(x)dx.
\end{aligned}$$

Es ist erlaubt, das Integrationsintervall zu verschieben, da die Integranden 2π-periodisch sind. Die Funktion $\cos(\cos(x))\sin(x)$ ist ungerade, also verschwindet das Integral von $-\pi$ bis π. Zudem gilt für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(\cos(\tfrac{\pi}{2}-s))\cos(\tfrac{\pi}{2}-s) &= \cos(-\cos(\tfrac{\pi}{2}+s))(-\cos(\tfrac{\pi}{2}+s)) \\
&= -\cos(\cos(\tfrac{\pi}{2}+s))\cos(\tfrac{\pi}{2}+s).
\end{aligned}$$

Folglich ist das zweite Integral gleich minus dem ersten, und wir erhalten

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(d) Wir berechnen

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \sin(t+it)\cdot(1+i)dt = -\frac{1+i}{1+i}\cos(t+it)\Big|_0^1 = 1 - \frac{e^{i-1}+e^{1-i}}{2}.$$

(e) (Skizze.) Die Funktion f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (Verknüpfung holomorpher Funktionen) und jedes konvexe Polygon lässt sich in Dreiecke aufteilen. Nach Satz von Goursat verschwindet also dieses Integral.

2. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Wegintegral $\int_\gamma f(z)dz$ der Funktion $f(z) = (z-z_0)^{-n}$ längs $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{2\pi it}$.

Lösung. Es gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 (re^{2\pi it})^{-n}\cdot 2\pi i re^{2\pi it}dt = 2\pi i\int_0^1 (re^{2\pi it})^{-n+1}dt.$$

Falls $n = 1$, dann ist der Integrand gleich 1, und das Integral somit gleich $2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$. Für $n > 1$ besitzt $re^{2\pi i(-n+1)t}$ die Stammfunktion $\frac{r}{2\pi i(-n+1)}e^{2\pi i(-n+1)t}$ und damit

$$\int_0^1 (re^{2\pi it})^{-n+1}dt = \frac{r}{2\pi i(-n+1)}re^{2\pi i(-n+1)t}\Big|_0^1 = 0.$$

3. Zeigen Sie:
$$\int_0^{2\pi} \cos(x)^{2n} dx = 2^{1-2n} \binom{2n}{n} \pi.$$

Hinweis: Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma z^{-1}(z+z^{-1})^{2n} dz$ unter Verwendung der Aufgabe 2.

Lösung. Wir schreiben
$$\int_\gamma z^{-1}(z + z^{-1})^{2n} dz = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \int_\gamma z^{2i-2n-1} dz.$$

Aus Aufgabe 2 wissen wir, dass alle Summanden verschwinden mit Ausnahme desjenigen mit z^{-1}, das heisst
$$\int_\gamma z^{-1}(z + z^{-1})^{2n} dz = \binom{2n}{n} \int_\gamma z^{-1} dz = \binom{2n}{n} 2\pi i.$$

Andererseits gilt
$$\int_\gamma z^{-1}(z + z^{-1})^{2n} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}(\underbrace{e^{it} + e^{-it}}_{2\cos(t)})^{2n} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 2^{2n} \cos(t)^{2n} dt,$$

und somit
$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n} dt = \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n} \pi$$

wie behauptet.

4. Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und $\partial B_R(a)$ der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $R > 0$ (im Gegenuhrzeigersinn orientiert). Zeigen Sie:
$$\int_{\partial B_R(a)} P(\overline{z})\, dz = 2\pi i R^2 P'(\bar{a})$$

Hinweis. Es genügt, die Aussage für Polynome der Form $P_k(X) := (X - \bar{a})^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen – weshalb?

Lösung. Da beide Seiten der gewünschten Gleichung $\mathbb{C}$-linear im Polynom P sind, genügt es, die Aussage für alle Elemente P einer Basis des Vektorraums $\mathbb{C}[X]$ zu zeigen. Statt der üblichen Basis $(X^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nehmen wir die Basis $(P_k(X))_{k\in\mathbb{N}_0}$ wie im Hinweis. Damit haben wir nämlich
$$P_k'(\bar{a}) = \begin{cases} 1, & \text{für } k = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Parametrisieren wir nun $\gamma = \partial B_R(a)$ durch $\gamma(t) = a + Re^{it}$, so können wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_\gamma P_k(\bar{z})dz &= \int_0^{2\pi} (\overline{a + Re^{it}} - \bar{a})^k \cdot Rie^{it}dz \\
&= \int_0^{2\pi} (Re^{-it})^k \cdot Rie^{it}dz \\
&= \int_0^{2\pi} R^{k+1}e^{it(1-k)}dz \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} R^2e^0dz = 2\pi i R^2 & \text{, für } k = 1 \\ \displaystyle\frac{R^{k+1}}{i(1-k)}e^{it(1-k)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{R^{k+1}}{i(1-k)}\left(e^{2\pi i(1-k)} - 1\right) = 0 & \text{, sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Ausdruck für P_k' oben zeigt, dass die gewünschte Formel für alle P_k erfüllt ist.

5. Finden Sie einen einfachen Beweis des Satzes von Goursat für Rechtecke (Korollar 3.2.1 der Vorlesung) unter der zusätzlichen Annahme, dass $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, also f holomorph.

   Lösung.

   Variante 1. (Hauptsatz der Integralrechnung und Fubini)

   Sei Q ein Rechteck mit Seiten $L_1, \ldots, L_4$. Schreibe $f = u + iv$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $Q = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ und } c \leqslant y \leqslant d\}$ für gewisse $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Eine explizite Rechnung zeigt, dass

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{L_k} f(z)dz = I_1 + iI_2,$$

   wobei

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_a^b (u(x,d) - u(x,c))dx - \int_c^d (v(b,y) - v(a,y))dy \\
I_2 &= -\int_a^b (v(x,d) - v(x,c))dx + \int_c^d (u(b,y) - u(a,y))dy
\end{aligned}$$

   Wir zeigen, dass $I_1 = I_2 = 0$: Da f holomorph ist, sind die partiellen Ableitungen stetig und wir dürfen den Hauptsatz der Integralrechnung und den Satz von Fubini anwenden. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int_a^b \int_c^d u_y dy dx - \int_c^d \int_a^b v_x dx dy = -\int_a^b \int_c^d u_y + v_x dy dx \\
I_2 &= -\int_a^b \int_c^d v_y dy dx + \int_c^d \int_a^b u_x dx dy = \int_a^b \int_c^d -v_y + u_x dy dx
\end{aligned}
$$

Wiederum da f holomorph ist, gelten die Cauchyschen Differentialgleichungen und es folgt $I_1 = I_2 = 0$ wie gewünscht.

Variante 2. (Satz von Green)

Da f holomorph ist, sind die partiellen Ableitungen stetig und wir dürfen den Satz von Green anwenden – auch für Rechtecke. Sei $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_4$ eine Parametrisierung des Rands und schreibe $f = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial Q} f(z) dz &= \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} f(\gamma_k(t)) \cdot \gamma_k'(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^{4} \left(\int_{\gamma_k} \langle \left(\begin{smallmatrix} u(\gamma_k(t)) \\ -v(\gamma_k(t)) \end{smallmatrix}\right), \gamma_k'(t) \rangle dt + i \int_{\gamma_k} \langle \left(\begin{smallmatrix} v(\gamma_k(t)) \\ u(\gamma_k(t)) \end{smallmatrix}\right), \gamma_k'(t) \rangle dt \right) \\
&= \int_{\partial Q} g \cdot \mathrm{ds} + i \int_{\partial Q} \tilde{g} \cdot \mathrm{ds}.
\end{aligned}
$$

Im letzten Term stehen die Wegintegrale zweier stetig differenzierbarer Vektorfelder $g, \tilde{g} \colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ entlang ∂Q als reelle Integrale. Auf diese wenden wir den Satz von Green an und erhalten

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial Q} g \cdot \mathrm{ds} + i \int_{\partial Q} \tilde{g} \cdot \mathrm{ds} &= \int_Q (\partial_x g_2 - \partial_y g_1) dx dy + i \int_Q (\partial_x \tilde{g}_2 - \partial_y \tilde{g}_1) dx dy \\
&= \int_Q (-v_x - u_y) dx dy + i \int_Q (u_x - v_y) dx dy
\end{aligned}
$$

Da f holomorph ist, folgt mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Behauptung.