Lösungen Serie 4

Wegintegrale, Integralsatz und Integralformel von Cauchy

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $|f(z) - 1| < 1$ für alle $z \in \Omega$, und $\gamma : [a, b] \to \Omega$ eine glatte, geschlossene Kurve. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = 0.$$

Lösung. Wir schliessen aus $|f(z) - 1| < 1$, dass f keine Nullstellen in Ω hat. Die Funktion $\frac{f'}{f}$ ist in Ω also wohldefiniert und holomorph. Wir substituieren

$$\int_\gamma (f(z))^{-1} f'(z) \mathrm{d}z = \int_{f\circ\gamma} w^{-1} \mathrm{d}w = \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{w} \mathrm{d}w.$$

Da w im Ball mit Radius 1 um den Punkt 1 liegt, ist dies ist ein Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg, nach dem Cauchy-Integralsatz also 0.

Bemerkung: *Wir werden später sehen, dass Rechnungen dieser Art leicht auf allgemeinere Funktionen mit isolierten Null- und Polstellen ausgeweitet werden können.*

2. Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

   (a) Für $R > 0$ definiere man $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$. Man zeige

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1} = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass für $R > 1$ das Integral

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1}$$

   von R unabhängig ist.

(c) Verwenden Sie die Cauchy'schen Integralsatz und Integralformel und Partialbruchzerlegung, um für grosse R

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$$

zu berechnen.

Lösung.

(a) Sei $R > 0$. Dann ist der Rand $\partial D_R = [-R,\, R] \cup \gamma_R$, wobei γ_R die Halbkreislinie $\{Re^{it} \mid t \in [0,\, \pi]\}$ bezeichnet. Es gilt für das Integral

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} + \int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

Dann hat man

$$\left| \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} - \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} \right| \leqslant \int_{\gamma_R} \left| \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} \right|.$$

Aber für $R > 1$ hat man die Abschätzung $\left|\frac{1}{z^4+1}\right| \leqslant \frac{1}{R^4-1}$. Somit ist

$$\left| \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} - \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} \right| \leqslant \frac{\pi R}{R^4-1}.$$

Im Limes $R \to \infty$ bedeutet dies:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}.$$

Man kann durch Vergleich mit der Funktion $t \mapsto t^{-4}$ für $|t| \geqslant 1$ leicht überprüfen, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}$ konvergiert. Wir zeigen in der nächsten Teilaufgabe, dass der andere Grenzwert auch existiert.

(b) Die Gleichung $z^4 + 1 = 0$ hat zwei Lösungen mit positivem Imaginärteil, nämlich $z_1 = e^{i\pi/4}$ und $z_2 = e^{i3\pi/4}$. An diesen Punkten ist der Integrand nicht definiert. Wenn $R > 1$ ist, dann sind z_1 und z_2 in $\mathrm{int}(D)$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $B_i := B_\varepsilon(z_i) \subset D_R$ für $i = 1, 2$, und $K := D \smallsetminus (B_1 \cup B_2)$. Dann ist

$$0 = \int_{\partial K} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \left(\int_{\partial D_R} - \int_{\partial B_1} - \int_{\partial B_2} \right) \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

Die erste Gleichheit folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz, denn die Funktion $z \mapsto 1/(z^4+1)$ ist analytisch auf K. Um diesen Satz anzuwenden, muss jedoch ein achsenparalleles Gitter auf K betrachtet werden, wie im Beweis der analogen Behauptung im Beweis der Cauchyschen Integralformel. Dann ist

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} + \int_{\partial B_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

Der Ausdruck rechts der Gleichheitszeichen ist tatsächlich unabhängig von R. Aus diesem Grund ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} + \int_{\partial B_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

(c) Nach Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\bar{z}_2}{z-z_1} + \frac{\bar{z}_1}{z-z_2} + \frac{z_2}{z-\bar{z}_1} + \frac{z_1}{z-\bar{z}_2}\right)$$

Da $z_j, \bar{z}_i \notin B_i$ für $j \neq i \in \{1,2\}$, sind nach Integralsatz und Integralformel von Cauchy

$$\int_{\partial B_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \frac{1}{4}\int_{\partial B_1} \frac{\bar{z}_2}{z-z_1}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{2}\bar{z}_2 = \frac{\pi i}{2} e^{-i3\pi/4} \quad \text{und}$$

$$\int_{\partial B_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \frac{1}{4}\int_{\partial B_2} \frac{\bar{z}_1}{z-z_2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{2}\bar{z}_1 = \frac{\pi i}{2} e^{-i\pi/4}.$$

Somit ist also

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1} = \frac{\pi i}{2}\left(e^{-i3\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) = \frac{\pi i}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i+1-i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3. (Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra). Zeigen Sie, dass ein Polynom ohne Nullstellen konstant ist, indem Sie den Cauchy'schen Integralsatz anwenden.

Hinweis: Wenn $P(z)$ ein nicht konstantes Polynom ist, dann lässt es sich darstellen als $P(z) = P(0) + zQ(z)$. Teilen Sie durch $zP(z)$ und integrieren Sie über einen grossen Kreis. Dies ergibt einen Widerspruch, wenn P keine Nullstellen besitzt.

Lösung. Sei P ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstellen. Dann ist $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, für $n > 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Ausserdem ist $a_0 = P(0) \neq 0$, denn sonst wäre $z = 0$ eine Nullstelle von P. Setzen wir $Q(z) := \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} z^i$, so gilt

$$P(z) = P(0) + zQ(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Für $z \neq 0$ haben wir also

$$\frac{1}{z} = \frac{P(0)}{zP(z)} + \frac{Q(z)}{P(z)}.$$

Sei $R > 0$ und $B := B_R(0)$. Es gilt

$$\int_{\partial B} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\partial B} \frac{P(0)}{zP(z)}\mathrm{d}z + \int_{\partial B} \frac{Q(z)}{P(z)}\mathrm{d}z.$$

Da $z \mapsto \frac{Q(z)}{P(z)}$ analytisch ist auf B_R, verschwindet nach dem Integralsatz das zweite Integral auf der rechten Seite. Für das Integral auf der linken Seite gilt

$$\int_{\partial B_R} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i$$

(z.B. nach der Cauchy'schen Integralformel oder Serie 3, Aufgabe 2). So ergibt sich für alle $R > 0$:

$$\int_{\partial B_R} \frac{\mathrm{d}z}{zP(z)} = \frac{2\pi i}{P(0)}.$$

Andererseits gilt für alle $z \in \partial B_R$:

$$\begin{aligned} |P(z)| = \left| z^n \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right) \right| &\geqslant R^n \left| |a_n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \right| \\ &\geqslant R^n \left| |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{R^{n-k}} \right| \end{aligned}$$

Also

$$\left| \int_{\partial B_R} \frac{\mathrm{d}z}{zP(z)} \right| \leqslant \frac{2\pi R}{R \cdot R^n \left| |a_n| - \sum_{i=1}^n \frac{|a_{n-i}|}{R^i} \right|} = \frac{2\pi}{R^n \left| |a_n| - \sum_{i=1}^n \frac{|a_{n-i}|}{R^i} \right|} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

Widerspruch.

4. Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Wegintegral der Funktion e^{iz^2} entlang des Rands eines $\frac{\pi}{4}$-Kreissektors mit Radius R, und berechnen Sie den Grenzwert für $R \to \infty$.

Lösung. Nach Definition gilt für jede integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx,$$

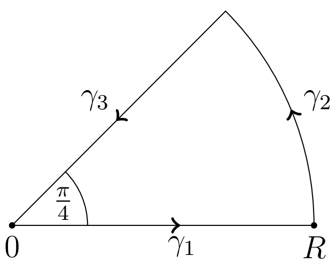
Ebenfalls gilt

$$\int_0^R \cos(x^2)dx + i\int_0^R \sin(x^2)dx = \int_0^R e^{ix^2}dx.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{ix^2}dx = (i+1)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Wir betrachten den Weg $\gamma = \gamma(R) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ aus dem Hinweis:



Der erste Teil $\int_{\gamma_1} e^{iz^2}dz = \int_0^R e^{ix^2}dx$ ist das Integral, das wir berechnen wollen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\int_\gamma e^{iz^2}dz = 0$; folglich

$$\int_{\gamma_1} e^{iz^2}dz = -\int_{\gamma_2} e^{iz^2}dz - \int_{\gamma_3} e^{iz^2}dz.$$

Wir berechnen die beiden Integrale auf der rechten Seite der Gleichung separat: Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2(R)} e^{iz^2}dz\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2it}} \cdot iRe^{it}dt\right| \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} |e^{iR^2e^{2it}}| \cdot |iRe^{it}|dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin(2t)}dt.\end{aligned}$$

Sei nun $0 < \delta < \frac{\pi}{4}R$ beliebig. Wir schreiben

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin(2t)}dt = \int_0^{\frac{\delta}{R}} Re^{-R^2\sin(2t)}dt + \int_{\frac{\delta}{R}}^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin(2t)}dt$$

und betrachten wieder die einzelnen Summanden auf der rechten Seite separat:

$$\int_0^{\frac{\delta}{R}} Re^{-R^2\sin(2t)}dt \leqslant \int_0^{\frac{\delta}{R}} Re^{-R^2\min\{\sin(2t)|t\in[0,\frac{\delta}{R}]\}}dt = \int_0^{\frac{\delta}{R}} Rdt = \delta,$$

sowie

$$\int_{\frac{\delta}{R}}^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin(2t)}dt \leqslant \int_{\frac{\delta}{R}}^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin(2\frac{\delta}{R})}dt = (\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\delta}{R})Re^{-R^2\sin(2\frac{\delta}{R})}.$$

Für R genügend gross haben wir $R\sin(2\frac{\delta}{R}) \geqslant \delta$ und damit

$$(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\delta}{R})Re^{-R^2\sin(2\frac{\delta}{R})} \leqslant (\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\delta}{R})Re^{-R\delta} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Es folgt, dass

$$\limsup_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_2(R)} e^{iz^2}dz \right| \leqslant \delta.$$

Da $0 < \delta < \frac{\pi}{4}R$ beliebig war, erhalten wir

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2(R)} e^{iz^2}dz = 0$$

Der Weg $-\gamma_3$ besitzt die Parametrisierung $[0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto (1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}t$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} e^{iz^2}dz = -\int_{-\gamma_3} e^{iz^2}dz &= -\int_0^R (e^{i(\frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}t)^2}(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}dt \\ &= -(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^R e^{-t^2}dt.\end{aligned}$$

Aus der Analysis wissen wir, dass $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Folglich ist

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = -\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2(R)} e^{iz^2}dz + \lim_{R\to\infty}\int_{-\gamma_3(R)} e^{iz^2}dz = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

wie behauptet.

5. Zeigen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Hinweis. Verwenden Sie einen halben Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R\}$.

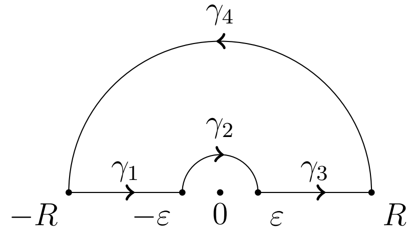
Lösung. Da $\frac{\sin(x)}{x}$ eine gerade Funktion ist, gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

Ebenfalls ist
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{x} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Da beide Integrale auf der rechten Seite reellwertig sind, müssen wir somit zeigen, dass
$$\operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \pi.$$

Betrachten wir den Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ aus dem Hinweis:



Das Integral, das wir berechnen wollen, ist
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\gamma_1(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_3(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right).$$

Nach dem Integralsatz von Cauchy gilt $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. Folglich ist
$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Der Weg γ_2 hat die Parametrisierung $[0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \varepsilon e^{i(\pi-t)} = -\varepsilon e^{-it}$. Wir berechnen
$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i\varepsilon e^{-it}}}{-\varepsilon e^{-it}} \cdot i\varepsilon e^{-it} dt = -i \int_0^\pi e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt.$$
Also ist
$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\gamma_1(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_3(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = i \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_0^\pi e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt - \int_{\gamma_4(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) \\ &\overset{(*)}{=} i \int_0^\pi \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-i\varepsilon e^{-it}} dt - \int_{\gamma_4(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi - \int_{\gamma_4(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz.\end{aligned}$$

In der Gleichheit (*) durften wir Grenzwert und Integral vertauschen wegen der Stetigkeit von e^{-iz} in der Nähe von 0.

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4(R)}\frac{e^{iz}}{z}dz\right) = 0$. Wähle hierzu die Parametrisierung $\gamma_4\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$. Dann gilt

$$\left|\int_{\gamma_4(R)}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| \leqslant \int_0^\pi \left|\frac{e^{Re^{it}}}{Re^{it}}\right| \cdot \left|iRe^{it}\right| dt = \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt.$$

Wie in der Lösung von Aufgabe 4, teilen wir dieses Integral auf, mit $0 < \delta < \pi$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt &= \int_0^\delta e^{-R\sin(t)}dt + \int_\delta^{\pi-\delta} e^{-R\sin(t)}dt + \int_{\pi-\delta}^\pi e^{-R\sin(t)}dt \\ &\leqslant \delta + \pi e^{-R\sin(\delta)} + \delta \to 2\delta \quad (R\to\infty).\end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\delta \to 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx &= \operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x}dx\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2(\varepsilon)}\frac{e^{iz}}{z}dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4(R)}\frac{e^{iz}}{z}dz\right) \\ &= \operatorname{Im}(i\pi + 0) = \pi\end{aligned}$$

wie gewünscht.