Lösungen Serie 5

Korollare der Integralformel von Cauchy

1. (a) Berechnen Sie für folgende Funktionen die Taylorreihe bei z_0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

$$\text{(ii)} \quad z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{für } z_0 = 1 \qquad \text{(ii)} \quad z \mapsto \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \quad \text{für } z_0 = 0$$

   (b) Was ist der Konvergenzradius der Taylorreihe der Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbb{C}$?

Lösung.

(a) Wir verwenden die geometrische Reihe und erhalten formal

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{k\geqslant 0} (1-z)^k = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k (z-1)^k.$$

Dies ist eine Taylorreihe um $z_0 = 1$ mit Konvergenzradius 1.

(b) Durch eine Partialbruchzerlegung erhalten wir zwei Summanden, auf die wir die geometrische Reihe anwenden können:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 - 5z + 6} &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - z/2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-z/3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k\geqslant 0} (z/2)^k - \frac{1}{3} \sum_{k\geqslant 0} (z/3)^k \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} \right) z^k. \end{aligned}$$

Dies ist eine Taylorreihe mit Konvergenzradius 2 um den Punkt $z_0 = 0$.

(c) Der Konvergenzradius der Taylorreihe an der Stelle $a \in \mathbb{C}$ ist der Radius des grössten Balls, der noch im Definitionsgebiet der holomorphen Funktion enthalten ist. In diesem Fall ist die Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ definiert und holomorph, und somit ist der Konvergenzradius gleich $\min\{|a-i|, |a+i|\}$.

2. Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$ sowie $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

   Lösung. Die Funktion f besitzt eine Potenzreihenentwicklung, die wir anhand der Funktionalgleichung bestimmen wollen. Es gilt

$$f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1} \stackrel{!}{=} z \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+1} = zf(z).$$

   Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $a_1 = 0$ und $(n+2)a_{n+2} = a_n$ für alle $n \geqslant 1$. Dadurch verschwinden alle ungeraden Koeffizienten, und für die geraden gilt $a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{2n+2} = \frac{1}{2}\frac{a_{2n}}{n+1}$, was induktiv mit $a_0 = f(0) = 1$ in $a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ resultiert. Wir erhalten also

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n n!} z^{2n} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{z^2}{2}\right)^n = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

   Variante. Wir schreiben formal $g = \log f$ und erhalten $g' = \frac{f'}{f} = z$. Die Stammfunktionen erfüllen also $\log f(z) = \frac{z^2}{2} + c$ und somit $f(z) = e^{\frac{z^2}{2}+c}$. Die Bedingung $f(0) = 1$ ergibt dann $c = 0$, also erhalten wir als Kandidaten für f die Funktion $f(z) = e^{\frac{z^2}{2}}$. Diese Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$, erfüllt $f(0) = 1$ und $f'(z) = z \cdot e^{\frac{z^2}{2}} = zf(z)$, also alle geforderten Bedingungen.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und nichtleer und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Fortsetzung von f ist ein Paar (g, Ω_g) mit $\Omega \subset \Omega_g$ und $g|_\Omega = f$.

   (a) Zeigen Sie: Es existiert eine maximale holomorphe Fortsetzung (g, Ω_g) von f mit Ω_g offen und zusammenhängend.

   (b) Konstruieren Sie eine maximale Fortsetzung der Gammafunktion

$$\Gamma\colon \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\} \to \mathbb{C}, \quad s \mapsto \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

   Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

   Lösung.

   (a) Dies ist eine Anwendung des Zornschen Lemmas:

   Wir betrachten die Menge $\mathcal{S}$ der holomorphen Fortsetzungen (g, Ω_g) von f mit Ω_g offen und zusammenhängend, mit der partiellen Ordnung

$$(g, \Omega_g) \leqslant (g', \Omega_{g'}) \stackrel{\text{def}}{\iff} \Omega_g \subset \Omega_{g'} \text{ und } g'|_{\Omega_g} = g.$$

Die Menge ist nicht leer, da $(f,\Omega)\in\mathcal{S}$. Sei nun $\mathcal{K}\subset\mathcal{S}$ eine Kette. Setze

$$\tilde{\Omega} := \bigcup_{(g,\Omega_g)\in\mathcal{K}} \Omega_g$$

und definiere $\tilde{g}\colon \tilde{\Omega}\to\mathbb{C}$ via $\tilde{g}|_{\Omega_g} = g$. Dann ist $\tilde{g}$ wohldefiniert, da $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{S}$ ist, und holomorph, da lokal holomorph; und es gilt $\tilde{g}|_{\Omega} = f$. Zudem ist $\tilde{\Omega}$ als Vereinigung offener, zusammenhängender Mengen mit nichtleerem Schnitt ebenfalls offen und zusammenhängend. Also ist $(\tilde{g},\tilde{\Omega})$ ein Element von $\mathcal{S}$ und nach Konstruktion eine obere Schranke von $\mathcal{K}$. Gemäss Lemma von Zorn enthält $\mathcal{S}$ mindestens ein maximales Element, also eine maximale holomorphe Fortsetzung von f.

Bemerkung. Diese Fortsetzung ist nicht eindeutig. Sei zum Beispiel f der Hauptzweig des Logarithmus eingeschränkt auf die offene obere Halbebene. Dann sind der Hauptzweig auf $\mathbb{C}\smallsetminus\{(-\infty,0]\}$ und der Zweig auf $\mathbb{C}\smallsetminus\{[0,\infty)\}$ zwei verschiedene maximale holomorphe Fortsetzungen von f.

(b) Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ liefert partielle Integration

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t} dt = \underbrace{\lim_{t\to\infty}(-t^s e^{-t})}_{=0} + s\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt = s\Gamma(s)$$

und damit die Identität

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Da $\mathrm{Re}(s+1) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) > -1$, lässt sich also die Gammafunktion auf die Menge $\{s\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > -1\}\smallsetminus\{0\}$ fortsetzen, indem wir $\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ setzen für $s\neq 0$ mit $-1 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 0$. Wiederholen wir dieses Verfahren, erhalten wir die Darstellung

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(s+k)}$$

für jedes $n\in\mathbb{N}$ und damit eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ (als Zusammensetzung von auf dieser Menge holomorphen Funktionen).

Bemerkung. Im Gegensatz zum allgemeinen Fall ist diese Funktion die *eindeutige* maximale holomorphe Fortsetzung von Γ.

4. Sei $n\in\mathbb{N}$, und seien r und C zwei positive reelle Zahlen. Für eine ganze Funktion f gelte die Abschätzung $|f(z)|\leqslant C\,|z|^n$ für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|\geqslant r$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom von Grad höchstens n sein muss.

Lösung. Es reicht zu zeigen, dass die Taylorentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ von f um 0 ein Polynom vom Grad höchstens n ist: Da dieses auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, folgt damit die Behauptung.

Variante 1. (Cauchy Abschätzungen) Nach den Cauchy Abschätzungen für die Ableitungen von f gilt für alle $R > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{k!}{R^k} \max_{\partial B_R(0)} |f|$$

Für $R > r$ gilt zudem nach Annahme

$$\max_{\partial B_R(0)} |f| \leqslant \max_{\partial B_R(0)} C\,|z|^n = CR^n$$

und folglich

$$\left|f^{(k)}(0)\right| \leqslant k!\, CR^{n-k}.$$

Für $k > n$ strebt die rechte Seite der Ungleichung gegen 0 für $R \to \infty$. Da $f^{(k)}(0)$ von R unabhängig ist, folgt damit $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k > n$ und die Taylorreihe von f ist ein Polynom vom Grad höchstens n.

Variante 2. (Liouville) Setze $a_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Nach Voraussetzung ist $f \in O(z^n)$ für $n \to \infty$. Wir betrachten $g(z) := \sum_{k\geqslant 1} a_{k+n} z^k$, und sollen zeigen, dass diese ganze Funktion verschwindet. Zunächst ist

$$z^n g(z) = f(z) - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) \in O(z^n)$$

als Summe zweier Elemente von $O(z^n)$. Somit ist $g(z) \in O(1)$ beschränkt, also nach Liouville konstant. Da ihre Reihenentwicklung keinen konstanten Term hat, verschwindet g, und wir haben $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ wie behauptet.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant. Zeigen Sie:

   (a) (Minimumsprinzip) Hat f ein lokales Betragsminimum in einem Punkt $a \in \Omega$, so ist $f(a) = 0$.

   (b) Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge mit nichtleerem inneren $\mathring{K}$ und sei der Betrag von f auf dem topologischen Rand $\partial K = K \smallsetminus \mathring{K}$ konstant. Dann besitzt f eine Nullstelle in K.

   Lösung.

   (a) Ist $f(a) \neq 0$, dann gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung $U \subset \Omega$ von a so dass f auf U nirgends verschwindet. Also ist dort die Funktion

$g = 1/f$ definiert und analytisch. Da nach Voraussetzung $|f(z)| \geqslant |f(a)|$ für alle z in einer kleinen Umgebung von a, gilt in dieser Umgebung auch

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leqslant \frac{1}{|f(a)|} = |g(a)|\,.$$

Also hat g ein lokales Betragsmaximum und ist daher konstant auf U nach dem Maximumsprinzip. Daher ist auch $f = 1/g$ konstant auf U und da $U \subset \Omega$ offen und Ω zusammenhängend ist, ist f auf ganz Ω konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) Sei C so dass $|f(z)| = C$ für alle $z \in \partial K$. Nach dem Maximumsprinzip gilt $|f(z)| \leqslant C$ für alle $z \in K$.
Variante 1. Besitzt f keine Nullstelle in K so lässt sich dieses Argument auch auf $1/f$ anwenden, was

$$\frac{1}{|f(z)|} \leqslant \frac{1}{C} \quad \text{bzw.} \quad |f(z)| \geqslant C$$

liefert. Folglich hat f konstanten Betrag auf $\mathring{K} \subset K$ und ist wie in (a) somit konstant auf ganz Ω – erneut ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Variante 2. Da $|f(z)| \leqslant C \equiv |f|_{\partial K}|$, existiert ein $a \in \mathring{K}$ mit $|f(a)| = \min_{z \in K} |f(z)|$. Nach Teil (a) muss $f(a) = 0$ sein.

6. Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 < |z| < 2\}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

   (a) Beweisen Sie: Ist f beliebig genau durch Polynome approximierbar, so existiert eine holomorphe Fortsetzung auf $B_2(0)$.

   (b) Geben Sie ein Beispiel einer holomorphen Funktion auf Ω, die nicht beliebig genau durch Polynome approximiert werden kann.

Lösung.

(a) Sei p_n eine Folge von Polynomen, die gleichmässig auf Ω gegen f konvergiert. Falls wir zeigen können, dass die Folge der Polynome auf ganz $B_2(0)$ gleichmässig gegen einen Grenzwert konvergiert, so ist nach Weierstrass (Korollar 3.4.6) dieser Limes die gesuchte Fortsetzung. Nun gilt für die Polynome als ganze Funktionen natürlich die Cauchysche Integralformel

$$p_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{p_n(z)}{z - a}\, dz$$

und wir erhalten sofort die Abschätzung

$$|p_n(a) - p_m(a)| \leqslant 2 \max_{z \in \partial B_1(0)} |p_n(z) - p_m(z)|$$

für alle $a \in \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)}$. Die Folge der Polynome eingeschränkt auf $B_2(0)$ ist also eine Cauchy Folge und damit konvergent.

(b) Zum Beispiel lässt sich $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf Ω nicht beliebig genau durch Polynome approximieren: Sonst gäbe es nach Teil (a) eine holomorphe Fortsetzung dieser Funktion auf $B_2(0)$ und damit würde das Integral über $\partial B_1(0)$ nach dem Cauchyschen Integralsatz verschwinden – es ist aber gleich $2\pi i$.