# Lösungen Serie 6

## Nullstellen und Isolierte Singularitäten

1. (a) Sei $f(z) := \sin(z^2)$. Finden Sie für jede Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ von $f$ die Ordnung von $z_0$ als Nullstelle von $f$.

   (b) Sei $p(z) := 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ein Polynom. Bestimmen Sie die Ordnung von $z_0 = 0$ als Nullstelle der Funktion $f(z) := e^z - p(z)$ in Abhängigkeit von $p(z)$.

   (c) Sei $f(z) := \cos(z^3)^3$. Bestimmen Sie die Multiplizität, mit der $f$ seinen Wert bei 0 annimmt.

*Lösung.*

(a) Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Nullstelle von $f(z) := \sin(z^2)$ genau dann, wenn $z_0^2 \in \pi\mathbb{Z}$. Da $\sin(z^2)' = 2z\cos(z^2)$, und da sin und cos keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, ist die Nullstellenordnung von $z_0$ gleich 1, falls $z_0 \neq 0$. Für $z_0 = 0$, berechnen wir die Taylorreihe

$$\sin(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z^2)^{2n+1} = z^2 - \frac{z^6}{3!} + O(z^{10})$$

um 0 und sehen, dass die Nullstellenordnung von $z_0 = 0$ gleich 2 ist.

(b) Setze $a_{n+1} := 0$. Der $m$-te Koeffizient der Taylorentwicklung von $e^z - p(z)$ um 0 verschwindet genau dann, wenn $a_m = \frac{1}{m!}$. Also ist die Nullstellenordnung von $z_0 = 0$ für $e^z - p(z)$ gleich

$$\min\{1 < m \leqslant n+1 \mid a_m \neq \tfrac{1}{m!}\}.$$

(c) Wir wollen die Ordnung von 0 als Nullstelle der Funktion $f(z) - f(0)$ bestimmen. Da $\cos(z^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{6n} = 1 - \frac{1}{2}z^6 + O(z^{12})$ nahe bei 0, gilt

$$f(z) = (1 - \frac{1}{2}z^6 + O(z^{12}))^3 = (1 - \frac{1}{2}z^6)^3 + O(z^{12}) = 1 - \frac{3}{2}z^6 + O(z^{12}).$$

Also ist $f(0) = 1$ mit Multiplizität 6.

2. Für die folgenden Funktionen behandle man die isolierte Singularität bei 0 wie folgt: Ist die Singularität hebbar, dann hebe man sie; ist sie ein Pol, bestimme man die Ordnung; ist sie wesentlich, so bestimme man für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ das Bild von $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ unter der Funktion.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ (b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^n}$ für $n \in \mathbb{Z}$

(c) $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ (d) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$

*Lösung.*

(a) Es gilt

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\sqrt{e^{2\operatorname{Re}(z)}(1 - 2\cos(\operatorname{Im}(z))) + 1}} = \infty,$$

also besitzt $f$ einen Pol bei 0. Die Ordnung des Pols ist gemäss Satz 4.1.1 der Vorlesung die Zahl $n \in \mathbb{N}$, für welche die Funktion $z^n f(z)$ um 0 holomorph ist und dort nicht verschwindet. Mit

$$zf(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + z/2! + z^2/3! + z^3/4! + \cdots} =: g(z)$$

sehen wir, dass $g$ in der Nähe von Null eine holomorphe Funktion ist mit $g(0) = 1 \neq 0$. Also besitzt $f(z)$ bei $z = 0$ einen Pol der Ordnung 1.

(b) In der Nähe von 0 gilt

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-n}}{k!}.$$

Für $n \leqslant 1$ ist $k - n \geqslant 0$ für alle $k \geqslant 1$ und somit

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} z\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-n}}{k!}\right) = 0.$$

Also ist in diesem Fall die Singularität bei 0 hebbar.

Für $n > 1$ erhalten wir nahe bei 0

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-n}}{k!} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell!}\frac{1}{z^{n-\ell}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+n)!}$$

und wir sehen, dass für $n > 1$

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \infty.$$

Also besitzt $f$ in diesem Fall bei 0 einen Pol. Da die Funktion

$$g(z) := z^{n-1}\left(\sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{1}{\ell!}\frac{1}{z^{n-\ell}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+n)!}z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}z^k$$

in der Nähe von Null holomorph ist mit $g(0) = 1 \neq 0$ und $f(z) = g(z)/z^{n-1}$, ist die Ordnung von 0 als Pol von $f$ gleich $n-1$.

(c) Es gilt entlang der imaginären Achse

$$\lim_{y\to 0} f(iy) = \lim_{y\to 0}\cos\left(\frac{1}{iy}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \infty,$$

also kann 0 keine hebbare Singularität von $f$ sein. Es handelt sich auch nicht um einen Pol, da um 0 in der Reihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-n}$$

unendlich viele negative Potenzen erscheinen. Also muss die Singularität bei 0 wesentlich sein.

*Alternativ.* Besässe eine der Funktionen $g_k(z) := z^k f(z)$ für $k \geqslant 1$ eine hebbare Singularität bei Null, so wäre $g_{k+1}$ und folglich $g_k$ gemäss Identitätssatz konstant gleich Null, da sich die Nullstellen 0 und $1/n\pi$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ von $g_{k+1}$ bei Null häufen – Widerspruch.

Nun zum Bild von $D^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ unter $z \mapsto \cos(1/z)$.

*Behauptung 1.* Cosinus ist surjektiv auf $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir müssen die Gleichung $e^{iz} + e^{-iz} = 2w$ für beliebige $w$ lösen. Multiplizieren dieser Gleichung mit $e^{iz}$ ergibt eine quadratische Gleichung $(e^{iz})^2 + 1 = 2we^{iz}$ für $e^{iz}$, welche nie Null als Lösung hat. Nimmt man einen Logarithmus dieser Lösung, so erhält man ein Urbild von $w$ unter der Cosinusfunktion.

*Behauptung 2.* Das Bild von $D^*$ unter $f$ ist $\mathbb{C}$.

Beweis: Da die Cosinusfunktion $2\pi i$-periodisch und surjektiv ist, ist das Bild jedes Streifens $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (x, x+2\pi]\}$ mit $x \in \mathbb{R}$ bereits ganz $\mathbb{C}$. Das Bild von $D^*$ unter der Abbildung $z \mapsto 1/z$ ist $\{z \in \mathbb{C} \mid 1/\varepsilon < |z|\}$, welches den Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (1/\varepsilon, 1/\varepsilon + 2\pi]\}$ enthält. Also wird jede beliebig kleine punktierte Umgebung von Null durch $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ abgebildet.

(d) Die Potenzreihenentwicklung von Sinus um 0 ist $z - z^3/3! + O(z^5)$ und damit ist $\sin(z)/z = 1 - z^2/3! + O(z^4)$ für alle $z \neq 0$ nahe bei 0. Diese Potenzreihe ist aber offensichtlich auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und somit eine Fortsetzung von $\sin(z)/z$ zu einer ganzen Funktion – die Singularität ist hebbar.

*Bemerkung.* Obwohl diese Funktion auf der reellen Achse beschränkt ist, ist sie auf $\mathbb{C}$ natürlich nicht beschränkt – sonst wäre sie nach Liouville konstant.

3. Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und seien $f, g : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Wir sagen, $f$ habe die *algebraische Ordnung $k \in \mathbb{Z}$ an der Stelle $a$*, falls der Grenzwert

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$$

in $\mathbb{C}$ existiert und nicht verschwindet.

(a) Die algebraische Ordnung von $f$ in $a$ sei $k$, diejenige von $g$ in $a$ sei $\ell$. Bestimmen Sie die möglichen algebraischen Ordnungen der Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f + g$.

(b) Was lässt sich über die Singularität $a$ der Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f + g$ aussagen, wenn $f$ oder $g$ oder gar beide in $a$ eine wesentliche Singularität haben?

*Lösung.*

(a) Wenn $L_{a,k}(f) := \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ und $L_{a,\ell}(g) := \lim_{z\to a}(z-a)^\ell g(z)$ beide in $\mathbb{C}$ existieren und nicht 0 sind, so existieren in $\mathbb{C}$ auch die Grenzwerte

$$L_{a,k}(f) \cdot L_{a,\ell}(g) = L_{a,k+\ell}(f \cdot g) \quad \text{und} \quad \frac{L_{a,k}(f)}{L_{a,\ell}(g)} = L_{a,k-\ell}(\tfrac{f}{g}),$$

und mit $m := \max\{k, \ell\}$ auch

$$L_{a,m}(f+g) = \lim_{z\to a}(z-a)^{m-k} L_{a,k}(f) + \lim_{z\to a}(z-a)^{m-\ell} L_{a,\ell}(g)$$

In den ersten beiden Fällen verschwinden die Grenzwerte nicht, die Funktionen $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ haben also die algebraischen Ordnungen $k + \ell$ beziehungsweise $k - \ell$. Im dritten Fall kann der Grenzwert höchstens dann verschwinden, wenn $f$ und $g$ die gleiche algebraische Ordnung haben. Die algebraische Ordnung von $f + g$ ist also das Maximum $m$ der beiden, falls $f$ und $g$ verschiedene algebraische Ordnungen haben. Falls sie gleiche algebraische Ordnung haben, so ist die algebraische Ordnung von $f + g$ höchstens $m = k = \ell$.

(b) Eine wesentliche Singularität $a$ zeichnet sich dadurch aus, dass der Grenzwert $L_{a,k}(f)$ für kein $k$ existiert.

Habe also $f$ eine wesentliche Singularität in $a$ und $g$ die algebraische Ordnung $\ell$ in $a$. Nimm an, $f \cdot g$ habe keine wesentliche Singularität. Dann gibt es also ein $k \in \mathbb{Z}$ so, dass der Grenzwert $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)g(z)$ in $\mathbb{C}$ existiert und nicht verschwindet. Schreibe für $z \neq a$ und $g(z) \neq 0$:

$$(z-a)^{k-\ell} f(z) = \frac{(z-a)^k f(z)g(z)}{(z-a)^\ell g(z)}$$

Dann existiert der Grenzwert für $z \to a$ auf der rechten Seite und somit auch auf der linken Seite der Gleichung – in Widerspruch zur Annahme, dass $f$

eine wesentliche Singularität habe. Also besitzt auch $f \cdot g$ eine wesentliche Singularität.

Da sich der Fall $\frac{f}{g}$ durch die Substitution $h = 1/g$ auf den Fall $f \cdot g$ zurückführen lässt, gilt dasselbe auch für $f/g$.

Für die Summe $f + g$ erhalten wir ebenfalls weiterhin eine wesentliche Singularität: Nehmen wir erneut widerspruchsweise das Gegenteil an, also dass der Grenzwert $\lim_{z \to a}(z-a)^k(f(z)+g(z))$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{C}$ existiert und nicht verschwindet. Wir schreiben für $m := \max\{k, \ell\}$:

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z) &= (z-a)^m(f(z)+g(z)-g(z)) \\ &= (z-a)^{m-k}(z-a)^k(f(z)+g(z)) - (z-a)^{m-\ell}(z-a)^\ell g(z).\end{aligned}$$

Auch hier existiert der Grenzwert für $z \to a$ auf der rechten, und somit auf der linken Seite der Gleichung – erneut ein Widerspruch. Also besitzt auch $f + g$ eine wesentliche Singularität.

Falls $f$ und $g$ beide eine wesentliche Singularität in $a$ haben, so lässt sich nichts über die Singularität von $f \cdot g$ und $f + g$ sagen, da wir mit $g = 1/f$ bzw. $g = -f$ hebbare Singularitäten und mit leichten Modifikationen auch Pole erschaffen können.

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ dicht ist in $\mathbb{C}$, d.h. $\forall z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : \exists w \in f(\mathbb{C}) : |z - w| < \varepsilon$.

   *Lösung.* Nehmen wir an, dass $f(\mathbb{C})$ nicht dicht liegt in $\mathbb{C}$. Das heisst, es existiert $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \cap f(\mathbb{C}) = \varnothing$. Dann ist $|f(z) - z_0| \geqslant \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und somit ist die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{f(z) - z_0}$$

   holomorph mit $|g(z)| \leqslant \varepsilon^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also beschränkt; nach Liouville ist $g$ folglich konstant. Aber dann ist auch $f$ konstant, im Widerspruch zur Annahme.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und beschränkt und sei $f\colon \Omega \to \Omega$ holomorph. Zeigen Sie:

   Falls ein Punkt $z_0 \in \Omega$ existiert mit $f(z_0) = z_0$ and $f'(z_0) = 1$, so ist $f$ die Identität.

   *Hinweis.* Weshalb kann man $z_0 = 0$ annehmen? Schreiben Sie $f(z) = z + a_n z^n + O(z^{n+1})$ für $z$ nahe 0 und zeigen Sie, dass $f_k(z) = z + k a_n z^n + O(z^{n+1})$ für die $k$-fache Verknüpfung $f_k := f \circ \ldots \circ f$. Schätzen Sie $f_k^{(n)}(0)$ für alle $k$ ab.

*Lösung.* O.B.d.A sei $z_0 = 0$ (sonst betrachten wir $f(z+z_0) - z_0$ auf der Menge $\Omega - z_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid z + z_0 \in \Omega\}$). Sei $f(z) = \sum_{m \geqslant 0} a_m z^m$ die Taylorentwicklung von $f$ um 0, und sei $n := \inf\{m \geqslant 1 \mid a_m \neq 0\}$. Wir wollen zeigen, dass $n = \infty$.

Nehmen wir widerspruchsweise an $n < \infty$. Mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ folgt dann $f(z) = z + a_n z^n + O(z^{n+1})$ mit $a_n \neq 0$.

*Behauptung.* Für die $k$-fache Verknüpfung $f_k$ von $f$ gilt $f_k(z) = z + k a_n z^n + O(z^{n+1})$ nahe bei 0.

Beweis (Induktion). Für $k = 0$ gilt die Aussage offensichtlich, da $f_0 = \mathrm{id}_\Omega$. Für $k > 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} f_k(z) &= f(f_{k-1}(z)) = f(z + (k-1)a_n z^n + O(z^{n+1})) \\ &= z + (k-1)a_n z^n + O(z^{n+1}) + a_n\big(z + (k-1)a_n z^n + O(z^{n+1})\big)^n + O(z^{n+1}) \\ &= z + \big((k-1)a_n + a_n\big)z^n + O(z^{n+1}) = z + k a_n z^n + O(z^{n+1}) \end{aligned}$$

wie behauptet.

Sei nun $\varphi\colon \Omega \to \Omega$ eine beliebige holomorphe Funktion. Da $\Omega$ beschränkt ist, existiert ein $0 < M < \infty$ mit $\Omega \subset B_M(0)$. Wegen $\varphi(\Omega) \subset \Omega$ erhalten wir also die Abschätzung $|\varphi(z)| \leqslant M$ für alle $z \in \Omega$. Folglich gilt mit den Cauchy Ungleichungen für alle Ableitungen von $\varphi$ und jeden Ball $B_R(0) \subset \Omega$:

$$\left|\varphi^{(m)}(0)\right| \leqslant \frac{m!}{R^m} \max_{\partial B_R(0)} |\varphi| \leqslant \frac{m!}{R^m} \cdot M.$$

Insbesondere gilt also für $\varphi = f_k$

$$|k a_n| = \left|\frac{f_k^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{M}{R^n}$$

für jedes $k \geqslant 1$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn $a_n = 0$ gilt, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $n = \infty$ und $f(z) = z$ nahe 0. Da $\Omega$ offen und zusammenhängend ist, folgt mit dem Identitätssatz, dass $f(z) = z$ auf ganz $\Omega$.