D-MATH Funktionentheorie HS 2018
Prof. Michael Struwe

Lösungen Serie 7

Residuen und Anwendungen des Residuensatzes

1. Bestimmen Sie alle Singularitäten und wo vorhanden deren Residuen.

(a) $\dfrac{z^3}{(1+z)^3}$ (b) $\dfrac{1}{e^z+1}$ (c) $\dfrac{e^z}{\sin(z)}$

(d) $\dfrac{\log(1+z)}{z^2}$ bei Null, für einen beliebigen Zweig des Logarithmus.

Lösung. Es bezeichne im Folgenden f jeweils die zu untersuchende Funktion.

(a) f hat einen Pol dritter Ordnung bei $z=-1$. Statt diesen Pol zu untersuchen, betrachten wir den Pol von $f(z-1)$ bei Null (die Funktion nur zu verschieben ändert nichts am Residuum).

$$f(z-1)=\frac{(z-1)^3}{z^3}=\frac{z^3-3z^2+3z-1}{z^3}=-\frac{1}{z^3}+\frac{3}{z^2}-\frac{3}{z}+1$$

und das Residuum ist somit -3.

(b) Die Polstellen von f sind $z_k:=(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ und sind erster Ordnung, da die Ableitung des Nenners nie Null ist. Wegen der $2\pi i$-Periodizität der Exponentialfunktion ist auch f $2\pi i$-periodisch und daher sind die Residuen an allen Polen gleich. Wir benutzen die Darstellung

$$\operatorname{Res}_{z_0} f=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Wir bemerken, dass der Bruch $\frac{z-\pi i}{e^z+1}$ gerade der Kehrwert des Differenzenquotienten für die Funktion e^z bei $z=\pi i$ ist. Folglich ist

$$\operatorname{Res}_{\pi i} f=\lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{e^z+1}=\frac{1}{(e^z)'|_{z=\pi i}}=-1.$$

(c) Die Pole von f liegen an den Stellen $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ und haben Ordnung 1. Analog zu Teil (b) finden wir

$$\operatorname{Res}_{k\pi} f=\lim_{z\to k\pi}\frac{(z-k\pi)e^z}{\sin(z)}=\frac{1}{(\sin(z)e^{-z})'|_{z=k\pi}}=(-1)^k e^{k\pi}$$

(d) Für den Zweig des Logarithmus, für den $\log(1+z)$ auf $\mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$ definiert ist, existiert keine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ so, dass dieser Zweig auf $\Omega \setminus \{0\}$ holomorph ist. Also ist 0 für diesen Zweig keine Singularität von f; insbesondere existiert dort kein Residuum.

Sei $\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihenentwicklung eines beliebigen anderen Zweiges des komplexen Logarithmus, wobei a_0 bis auf ganzzahlige Vielfache von $2i\pi$ bestimmt ist. Dann ist

$$f(z) = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z} + a_2 + O(z);$$

das Residuum ist also in jedem Falle gleich

$$a_1 = (\log(1+z))'(0) = \frac{1}{1+z}\Big|_{z=0} = 1.$$

2. Bestimmen Sie eine explizite Form für die durch den folgenden Ausdruck gegebene Funktion

$$f(w) := \frac{1}{\pi} \int_0^1 r \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\varphi} + w} \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r, \qquad w \in \mathbb{C},$$

berechnen Sie also für gegebenes $w \in \mathbb{C}$ das Integral $f(w)$. Ist f holomorph?

Lösung. Das innere Integral ist

$$I_{r,w} := -\int_{\partial B_r(0)} \frac{i}{z(z+w)} \, \mathrm{d}z =: -\int_{\partial B_r(0)} g(z) \, \mathrm{d}z,$$

dieser Ausdruck ergibt Sinn für $r \neq |w|$.

Ist $r < |w|$, liegt nur der Pol $z = 0$ im Innern des Balls $B_r(0)$; falls $r > |w|$ ist, kommt noch der Pol bei $z = -w$ dazu. Ist $w = 0$, so ist $g(z) = \frac{1}{z^2}$ und damit $I_{r,0} = 0$. Für $w \neq 0$ berechnen wir die Residuen von g bei $z = 0$ und $z = -w$:

Da 0 und $-w$ einfache Polstellen sind, gilt nach Bemerkung 4.1.2

$$\operatorname{Res}_0 g = \lim_{z \to 0} z g(z) = \frac{i}{z+w}\Big|_{z=0} = \frac{i}{w}$$

und

$$\operatorname{Res}_{-w} g = \lim_{z \to 0} (z+w) g(z) = \frac{i}{z}\Big|_{z=-w} = -\frac{i}{w}.$$

Somit ist nach dem Residuensatz

$$I_{r,w} = \begin{cases} \frac{2\pi}{w} & r < |w|, \\ 0 & r > |w|. \end{cases}$$

Wir haben also

$$f(w) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{w} \cdot \int_0^{\min(1,|w|)} r \,\mathrm{d}r = \frac{1}{w} \min\{1, |w|^2\} = \begin{cases} \bar{w} & |w| \leqslant 1, \\ \frac{1}{w} & |w| \geqslant 1. \end{cases}$$

Die Funktion ist nicht holomorph: Die bekannten Sätze über die Holomorphie von Integralen holomorpher Funktionen greifen nicht, da der Integrand eine Singularität bei $w = -re^{i\varphi}$ hat, falls $|w| \leqslant 1$ ist.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > |b|$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)} \,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Lösung. Für $b = 0$ stimmt die Aussage, denn mit $a > |b| = 0$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a} \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \frac{1}{a} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2}}.$$

Sei nun $b \neq 0$. Wir möchten das zu berechnende Integral umschreiben zu einem komplexen Wegintegral über den Rand des Balls $B_1(0)$, das heisst, wir suchen eine Funktion $f(z)$, die für irgendeine Konstante $C \in \mathbb{C}$ folgende Gleichung erfüllt:

$$C \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)} \,\mathrm{d}\theta = \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{f(z)} \,\mathrm{d}z := \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{f(e^{it})} \,\mathrm{d}t.$$

Dazu betrachten wir die Gleichung

$$e^{-it} f(e^{it}) = a + b\cos(t) = a + \tfrac{b}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

und dazu äquivalent

$$f(e^{it}) = ae^{it} + \tfrac{b}{2} e^{2it} + \tfrac{b}{2} = \tfrac{b}{2}(e^{2it} + \tfrac{2a}{b} e^{it} + 1).$$

Also tut's die Funktion $f(z) = z^2 + 2\frac{a}{b} z + 1$ und wir erhalten

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)} \,\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{b} i \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2 + 2\frac{a}{b} z + 1} \,\mathrm{d}z.$$

Die Polstellen von $g := 1/f$ sind genau die Nullstellen $z_{1,2} := -\frac{1}{b}(a \pm \sqrt{a^2 - b^2})$ von f, und diese haben Ordnung 1. Da $a > |b|$ sind dies zwei verschiedene reelle Zahlen, und nur eine davon liegt in $\overline{B_1(0)}$, nämlich z_2. Nach Residuensatz und mit der Darstellung $\operatorname{Res}_{z_2} g = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) g(z)$ gilt also

$$\int_{\partial B_1(0)} g(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_2} g = 2\pi i \frac{1}{z_2 - z_1} = 2\pi i \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Somit ist wie behauptet

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\theta)} \,\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{b} i \cdot 2\pi i \cdot \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

4. (a) Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keinen Pol auf der reellen Achse besitzt. Zeigen Sie: Falls die Funktion $f(\frac{1}{z})$ bei 0 eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung besitzt, so gilt

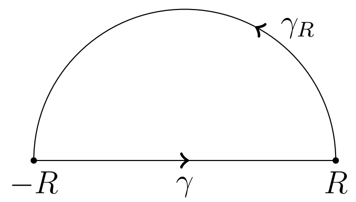
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \operatorname{Im}(a)>0}} \operatorname{Res}_a f.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4+6x^2+25}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung.

(a) Wir betrachten für $R > 0$ den Weg



Da f eine rationale Funktion ist, besitzt f nur endlich viele Polstellen, nämlich die Nullstellen des Polynoms im Nenner. Also gilt für genügend grosse R nach Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \operatorname{Im}(a)>0}} \operatorname{Res}_a f.$$

Dass f bei ∞ von mindestens zweiter Ordnung verschwindet, bedeutet, dass die Funktion $f(\frac{1}{z})$ bei 0 eine Nullstelle der Ordnung $k \geqslant 2$ besitzt. Also existiert der Grenzwert $\lim_{z\to 0} z^{-k} f(\frac{1}{z})$ in $\mathbb{C}$ und folglich gilt

$$\lim_{z\to 0} z^{-1} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \text{ oder dazu äquivalent: } \lim_{z\to\infty} z f(z) = 0.$$

Damit erhalten wir für alle $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^\pi \underbrace{\left|Re^{it} f(Re^{it})\right|}_{<\varepsilon}\,\mathrm{d}t < \pi\varepsilon$$

für genügend grosse R und es folgt, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right) = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a f.$$

(b) Aus der Faktorisierung

$$z^4 + 6x^2 + 25 = \big(z - (1+2i)\big)\big(z - (1-2i)\big)\big(z - (-1+2i)\big)\big(z - (-1-2i)\big)$$

folgt, dass die rationale Funktion $f(z) = (z-1)/(z^4 + 6z^2 + 25)$ als isolierte Singularitäten genau die vier Polstellen erster Ordnung in $\pm 1 \pm 2i$ besitzt, keine davon auf der reellen Achse. Zudem gilt $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, also sind die Voraussetzungen von Teil (a) erfüllt. Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4+6x^2+25}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{1+2i} \left(\frac{z-1}{z^4+6z^2+25} \right) + \mathrm{Res}_{-1+2i} \left(\frac{z-1}{z^4+6z^2+25} \right) \right).$$

Die Residuen können wir z.B. durch $\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ berechnen:

$$\mathrm{Res}_{1+2i} \left(\frac{z-1}{z^4+6z^2+25} \right)$$
$$= \left. \frac{z-1}{(z-1+2i)(z+1-2i)(z+1+2i))} \right|_{z=1+2i} = \frac{1-2i}{40}$$

und

$$\mathrm{Res}_{-1+2i} \left(\frac{z-1}{z^4+6z^2+25} \right)$$
$$= \left. \frac{z-1}{(z-1-2i)(z-1+2i)(z+1+2i))} \right|_{z=-1+2i} = \frac{3i-1}{40}$$

Dies ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4+6x^2+25}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \left(\frac{1-2i}{40} + \frac{3i-1}{40} \right) = -\frac{\pi}{20}.$$

5. (a) Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der reellen Achse besitzt. Zeigen Sie: Falls $f(\frac{1}{z})$ eine Nullstelle bei 0 besitzt, so gilt

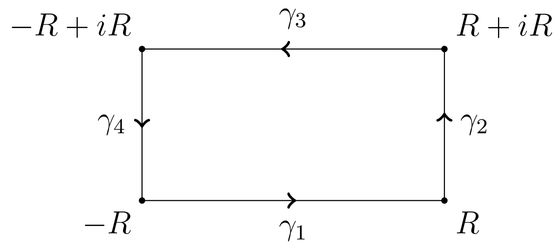
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \operatorname{Im}(a)>0}} \operatorname{Res}_a(f(z)e^{iz}).$$

(b) Berechnen Sie für $a > 0$ das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösung.

(a) Wir betrachten für $R > 0$ den Weg



Wie in Aufgabe 3 besitzt f und somit auch $f(z)e^{iz}$ nur endlich viele Polstellen und für genügend grosse R gilt also nach Residuensatz

$$\sum_{k=0}^{4} \int_{\gamma_k} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \operatorname{Im}(a)>0}} \operatorname{Res}_a(f(z)e^{iz}).$$

Die Funktion $f(\frac{1}{z})$ besitzt eine Nullstelle bei 0, also gilt $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = 0$, oder dazu äquivalent $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Insbesondere existiert das Supremum $s_R := \sup_{|z|\geqslant R} |f(z)|$ für genügend grosse R nicht nur, es konvergiert für $R \to \infty$ auch gegen 0. Aber die Integrale über die Wege γ_2 und γ_4 lassen sich im Absolutbetrag durch $s_R \int_0^R e^{-t}\,\mathrm{d}t$ abschätzen und das Wegintegral entlang γ_3 durch $2Re^{-R}s_R$. Also verschwinden alle drei im Grenzübergang $R \to \infty$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{4} \int_{\gamma_k} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z \right) = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \operatorname{Im}(a)>0}} \operatorname{Res}_a(f(z)e^{iz}).\end{aligned}$$

(b) Wir haben

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z.$$

Nun ist die Funktion $f(z) = 1/(z^2+a^2)$ rational mit nur einem Pol bei ia in der oberen Halbebene, und $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, also stimmt unser Integral nach Teil (a) überein mit

$$\frac{2\pi i}{2}\cdot \mathrm{Res}_{ia}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right) = \pi i \cdot \left.\frac{e^{iz}}{z+ia}\right|_{z=ia} = \pi i\cdot \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{\pi}{2ae^a},$$

wobei wir in der ersten Gleichheit wieder $\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ verwendet haben.

6. Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Falls der Realteil von f beschränkt ist, so ist f konstant.

Lösung. Ist f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, so auch $e^{f(z)}$, und $e^{f(z)}$ ist beschränkt, da $\left|e^{f(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}(f(z))}$. Also ist $e^{f(z)}$ konstant nach Liouville. Somit gilt für die Ableitung

$$0 = (e^{f(z)})' = e^{f(z)}f'(z) \qquad \text{für alle } z\in\mathbb{C}.$$

Da $e^{f(z)}$ auf $\mathbb{C}$ nie verschwindet, folgt $f'(z)=0$ auf ganz $\mathbb{C}$, also ist f auch konstant.