Lösungen Serie 8

Laurentreihen, isolierte Singularitäten, meromorphe Funktionen

1. Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung der folgenden Funktionen:

   (a) $f(z) = e^{z+z^{-1}}$ um 0.

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ um 0 und $-i$, in allen maximalen Konvergenzkreisringen.

   (c) $f(z) = \cot(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$ um 0 und bis Grad 3.

   Lösung.

   (a) Wir berechnen direkt

$$e^{z+z^{-1}} = e^z e^{z^{-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{-m}}{m!}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

   mit $c_k = c_{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+k)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Wir verwenden Partialbruchzerlegung und geometrische Reihen. Es gilt

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

   und nahe 0 haben wir die Darstellungen

$$\frac{1}{z-1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-z} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n, & |z| < 1 \\ \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, & |z| > 1 \end{cases}$$

   sowie

$$\frac{1}{z-2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} z^n, & |z| < 2 \\ \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n}, & |z| > 2. \end{cases}$$

Dies liefert um 0 die Laurentreihenentwicklungen

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-(n+1)}) z^n, & |z| < 1, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} z^n, & 1 < |z| < 2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n}, & |z| > 2. \end{cases}$$

Analog erhalten wir nahe $-i$

$$\frac{1}{z-1} = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{-(n+1)} (z+i)^n, & |z+i| < \sqrt{2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (1+i)^{n-1} (z+i)^{-n}, & |z+i| > \sqrt{2} \end{cases}$$

sowie

$$\frac{1}{z-2} = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^{-(n+1)} (z+i)^n, & |z+i| < \sqrt{5} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2+i)^{n-1} (z+i)^{-n}, & |z+i| > \sqrt{5}. \end{cases}$$

und damit um $-i$ die Laurentreihenentwicklungen

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left((1+i)^{-(n+1)} - (2+i)^{-(n+1)} \right) (z+i)^n, & |z+i| < \sqrt{2} \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n-1}}{(z+i)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2+i)^{n+1}}, & \sqrt{2} < |z+i| < \sqrt{5} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left((2+i)^n - (1+i)^n \right) (z+i)^{-n}, & |z+i| > \sqrt{5}. \end{cases}$$

(c) Da $\sin(z)$ bei 0 eine Nullstelle erster Ordnung besitzt, hat $f(z) := \cot(z)$ dort eine Polstelle erster Ordnung. Somit ist die Laurentreihenentwicklung um 0 gemäss Satz 4.1.4 von der Form $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n$. Zudem ist f eine ungerade Funktion, da $\cos(z)$ gerade und $\sin(z)$ ungerade. Folglich verschwinden alle geraden Koeffizienten $a_{2n}, n \in \mathbb{Z}$. Also bleibt uns die Koeffizienten a_{-1}, a_1 und a_3 zu bestimmen. Für a_{-1} berechnen wir

$$a_{-1} = \mathrm{Res}_0 f = \lim_{z \to 0} z \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1.$$

Für die verbleibenden Koeffizienten schreiben wir $f(z) = \frac{1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + O(z^5)$ und bemerken Folgendes:

$$\frac{1}{z}\left(f(z) - \frac{1}{z}\right) = a_1 + O(z^2) \xrightarrow{z\to 0} a_1$$

und

$$\frac{1}{z^3}\left(f(z) - \frac{1}{z} - a_1 z\right) = a_3 + O(z^2) \xrightarrow{z\to 0} a_3$$

Mit $\sin(z) = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 + O(z^7)$ und $\cos(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 + O(z^6)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\left(f(z) - \frac{1}{z}\right) &= \frac{z\cos(z) - \sin(z)}{z^2 \sin(z)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{30}z^5 + O(z^7)}{z^3 - \frac{1}{6}z^5 + O(z^7)} = \frac{-\frac{1}{3} + O(z^2)}{1 + O(z^2)} \xrightarrow{z\to 0} -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3}\left(f(z) - \frac{1}{z} - a_1 z\right) &= \frac{z\cos(z) - \sin(z) + z^3\sin(z)}{z^4 \sin(z)} \\ &= \frac{-\frac{1}{45}z^5 + O(z^7)}{z^5 + O(z^7)} \xrightarrow{z\to 0} -\frac{1}{45}\end{aligned}$$

Folglich ist die gesuchte Darstellung

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + O(z^5)$$

Bemerkung. In der vollständigen Laurentreihenentwicklung tauchen die nicht-verschwindenden Bernoulli-Zahlen B_{2n} auf:

$$\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \dots.$$

2. Sei $f(z) := (e^z - 1)/z^3$.

   (a) Bestimmen Sie den Hauptteil und das Residuum von f in 0.

   (b) Leiten Sie aus Teil (a) den Hauptteil und das Residuum von f^2 in 0 her.

   (c) Seien

   $$g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ und } h(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

   holomorphe Funktionen auf der punktierten Kreisscheibe $B^* := B_r(0) \setminus \{0\}$ für ein $r > 0$. Bestimmen Sie das Residuum von gh in 0.

Lösung.

(a) Aus der Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-3}$ folgt, dass

$$h(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z}$$

der Hauptteil von f ist und $\operatorname{Res}_0 f = 1/2$.

(b) Wir haben $f(z) = h(z) + 1/6 + z/24 + z^2 g(z)$ mit g holomorph auf $\mathbb{C}$. Also ist der Hauptteil von f^2 der Hauptteil von $h^2(z) + 2h(z)(1/6 + z/24)$, d.h

$$\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{7}{12z^2} + \frac{1}{4z}$$

und $\operatorname{Res}_0 f^2 = 1/4$.

(c) Für jedes $0 < \varepsilon < r$ gilt nach Definition

$$\operatorname{Res}_0(gh) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} g(z)h(z) \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n h(z) \,\mathrm{d}z.$$

Auf $\partial B_\varepsilon(0)$ ist h stetig, also beschränkt, und die Partialsummen $\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$ konvergieren absolut und gleichmässig für $N \to \infty$. Deswegen können wir Integral und Summe vertauschen. Es folgt

$$\operatorname{Res}_0(gh) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} z^n h(z) \,\mathrm{d}z \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \operatorname{Res}_0(z^n h(z)).$$

Da b_{-n-1} das Residuum von $h(z)z^n$ ist, liefert dies

$$\operatorname{Res}_0(gh) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{-n-1},$$

und die Reihe konvergiert.

3. Sei a eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion e^f kann keinen Pol in a haben.

(b) Ist Real- oder Imaginärteil von f in einer Umgebung von a beschränkt, so ist die Singularität von f in a hebbar.

Lösung.

(a) Wir betrachten drei Fälle für die unterschiedlichen Typen von Singularitäten:

(i) Ist a hebbar, so ist f in einer Umgebung von a beschränkt. Dann ist aber auch e^f in dieser Umgebung beschränkt, also hat e^f in a keinen Pol.

(ii) Ist a wesentlich, so ist nach Casorati-Weierstrass das Bild $f(B^*)$ jeder punktierten Kreisscheibe B^* um a dicht in $\mathbb{C}$. Damit ist auch $\exp f(B^*)$ dicht in $\mathbb{C}$, womit a eine wesentliche Singularität von e^f ist.

(iii) Ist a ein Pol, so existieren $c > 0$ und $\delta > 0$, so dass $|f(z)| \geqslant c$ auf der punktierten Kreisscheibe $B^* := B_\delta(a) \smallsetminus \{a\}$. Wir behaupten, dass $r > 0$ existiert mit $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B_r(0)} \subset f(B^*)$:
Die Funktion $g := 1/f$ ist auf B^* betragsmässig durch c beschränkt und lässt sich gemäss Satz 3.4.2 durch $g(a) = 0$ holomorph fortsetzen. Da g auf $B_\delta(a)$ also holomorph und nicht konstant 0 ist, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(0) \subset g(B_\delta(a)) \subset B_c(0)$. Dies ist äquivalent zu

$$\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B_r(0)} \subset f(B^*) \subset \mathbb{C} \smallsetminus \overline{B_c(0)}.$$

Die Menge $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B_r(0)}$ enthält einen horizontalen Streifen der Höhe $2\pi i$. Diese wird unter der $2\pi i$-periodischen Funktion $\exp(z)$ bereits auf ganz $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ abgebildet. Also ist $\exp f(B^*)$ dicht in $\mathbb{C}$, und damit ist a wieder eine wesentliche Singularität von e^f.

(b) OBdA sei $\operatorname{Re} f$ beschränkt (sonst betrachte $-if$).

Variante 1. (indirekt) Nimm an, die Singularität sei nicht hebbar. Dann ist a nach Teil (a) eine wesentliche Singularität von e^f. Somit ist das Bild jeder beliebig kleinen punktierten Kreisscheibe unter e^f nach Casorati-Weierstrass dicht in $\mathbb{C}$. Insbesondere kann $e^{\operatorname{Re} f} = \left|e^f\right|$ in keiner Umgebung von a beschränkt sein, also auch nicht $\operatorname{Re} f$ – Widerspruch.

Variante 2. (direkt) Ist $\operatorname{Re} f$ beschränkt auf $B_r(a) \smallsetminus \{a\}$ für ein $r > 0$, so auch $g := e^f$. Also ist g nach Satz 3.4.2. in a holomorph fortsetzbar, die Singularität also hebbar für g. Dann ist auch $g' = f'g$ holomorph auf $B := B_r(a)$, und da g nirgends verschwindet, folgt, dass auch $f' = g'/g$ auf B holomorph ist. Also besitzt f' eine auf B holomorphe Stammfunktion; und diese muss eine Fortsetzung von f sein. Also ist die Singularität in a auch für f hebbar.

4. Bestimmen Sie alle biholomorphen Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Hinweis. Überprüfen Sie für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorph, dass $g(z) := f(1/z)$ eine ausserwesentliche Singularität in 0 besitzt, und vergleichen Sie f und g nahe 0.

Lösung. Wir betrachten wie im Hinweis die auf $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ holomorphe Funktion $g(z) := f(\frac{1}{z})$ mit isolierter Singularität bei 0. Wäre die Singularität wesentlich, dann wäre das Bild M einer punktierten Kreisscheibe $B_r(0) \smallsetminus \{0\}$ unter g dicht in $\mathbb{C}$ nach Casorati-Weierstrass. Aber es gilt

$$M = g(B_r(0) \smallsetminus \{0\}) = f(\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B_{r^{-1}}(0)}).$$

Da f injektiv ist, muss das Bild $f(B_{r^{-1}}(0))$ disjunkt sein von M. Andererseits ist diese Menge offen, da f biholomorph ist, also insbesondere ein Homöomorphismus. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass M dicht in $\mathbb{C}$ ist, denn ein beliebiger Punkt in der offenen Menge $f(B_{r^{-1}}(0))$ ist in einer kleinen Kreisscheibe enthalten, die disjunkt von M ist. Also kann die Singularität nicht wesentlich sein. Es folgt, dass g an der Stelle 0 einen Pol hat oder eine hebbare Singularität, und damit hat die Laurentreihenentwicklung von g um 0 endlichen Hauptteil. Der Hauptteil in der Laurentreihenentwicklung von f verschwindet, da f holomorph ist. Wir haben also

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \\ g(z) &= b_{-k} z^{-k} + b_{-k+1} z^{-k+1} + \ldots + b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \end{aligned}$$

Da $g(z) = f(z^{-1})$ und da die Laurentreihenentwicklung eindeutig ist, folgt $a_j = b_{-j}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Da aber $b_j = 0$ für $j < -k$ ist, gilt $a_l = 0$ für $l > k$. Also hat die Potenzreihenentwicklung von f nur endlich viele Glieder, das heisst f ist ein Polynom. Da f injektiv ist, muss es genau Grad 1 haben. In der Tat, ist f von Grad 0, so ist f konstant und damit nicht injektiv. Ist umgekehrt der Grad d von f grösser als 1, gibt es Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit genau d Urbildern unter f, ein Widerspruch. Dies sieht man z.B. so: sei D die endliche Menge der Nullstellen von f', dann hat jedes $w \in \mathbb{C} \setminus f(D)$ genau d Urbilder, denn bei allen Nullstellen des Polynoms $f - w$ ist die Ableitung $f' = (f - w)'$ ungleich 0. Damit ist gezeigt: die Menge der biholomorphen Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist die Menge

$$\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}.$$

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend.

   (a) Sei $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der meromorphen Funktions auf Ω. Wir definieren die punktweise Addition und Multiplikation zweier Elemente f und g in $\mathcal{M}(\Omega)$ als $(f+g)(z) := f(z) + g(z)$ und $(f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$ da, wo f und g beide definiert sind, unter Heben aller hebbaren Singularitäten. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(\Omega)$ bezüglich dieser Verknüpfungen ein Körper ist, d.h.

   (i) $(\mathcal{M}(\Omega), +)$ ist eine abelsche Gruppe:
   - $+$ ist assoziativ,
   - $\mathcal{M}(\Omega)$ besitzt ein (eindeutiges) neutrales Element $0_{\mathcal{M}(\Omega)}$ bezüglich $+$,
   - für jedes $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, existiert ein (eindeutiges) Inverses $-f \in \mathcal{M}(\Omega)$ bezüglich $+$,
   - $+$ ist kommutativ,

   (ii) $(\mathcal{M}(\Omega)^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe:
   - $\cdot$ ist assoziativ,
   - $\mathcal{M}(\Omega)^*$ besitzt ein (eindeutiges) neutrales Element $1_{\mathcal{M}(\Omega)}$ bezüglich $\cdot$,

- für jedes $f \in \mathcal{M}(\Omega)^*$, existiert ein (eindeutiges) Inverses $f^{-1} \in \mathcal{M}(\Omega)^*$ bezüglich $\cdot$,
- $\cdot$ ist kommutativ,

(iii) $0_{\mathcal{M}(\Omega)} \neq 1_{\mathcal{M}(\Omega)}$,

(iv) $\cdot$ ist distributiv bezüglich $+$, d.h. $\forall f, g, h \in \mathcal{M}(\Omega) : f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

Hinweis. Einige dieser Eigenschaften folgen direkt aus der Tatsache, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation. Konzentrieren Sie sich auf die wesentlichen Teile.

(b) Schliessen Sie aus Teil (a), dass für alle $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ gilt

$$\forall z \in U : f(z)g(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0 \text{ oder } g \equiv 0.$$

Lösung.

(a) Da die Verknüpfungen punktweise definiert sind, folgt die Kommutativität von $+$ und $\cdot$ direkt aus der Kommutativität der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$.

Zur Assoziativität: Für eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ bezeichne $S_f \subset \Omega$ die Menge der Singularitäten von f. Für $f, g, h \in \mathcal{M}(\Omega)$ gilt dann $((f+g)+h)(z) = (f+(g+h))(z)$ für alle $z \in \Omega \setminus (S_f \cup S_g \cup S_h)$, und damit $(f+g)+h = f+(g+h)$ auch nach Heben aller hebbaren Singularitäten.

Dasselbe Argument zeigt die Distributivität, also dass $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$ für alle $f, g, h \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Aus der Tatsache, dass 0 und 1 die neutralen Elemente der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ sind, folgt direkt, dass die konstante Nullfunktion $0_{\mathcal{M}(\Omega)}$ und die konstante Einsfunktion $1_{\mathcal{M}(\Omega)}$ gerade die neutralen Elemente von $+$ und $\cdot$ auf $\mathcal{M}(\Omega)$ sind, und dass $0_{\mathcal{M}(\Omega)} \neq 1_{\mathcal{M}(\Omega)}$.

Für $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ definiere $(-f)(z) := -f(z)$ und $(f^{-1})(z) := 1/f(z)$. Dann gilt $f(z) + (-f)(z) = 0$ und $f(z) \cdot (f^{-1})(z) = 1$ für alle $z \in \Omega \setminus S_f$. Somit sind alle Singularitäten von $f + (-f)$ und $f \cdot f^{-1}$ hebbar durch 0 bzw. 1, das heisst $f + (-f) \equiv 0$ and $f \cdot (f^{-1}) \equiv 1$, also sind $-f$ and f^{-1} Inverse von f bezüglich $+$ bzw. $\cdot$, und damit ist $\mathcal{M}(\Omega)$ ein Körper.

(b) Dies ist ein Spezialfall der Tatsache, dass Körper Integritätsbereiche sind. Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $f \cdot g = 0_{\mathcal{M}(\Omega)}$ und nimm oBdA an, dass $f \neq 0_{\mathcal{M}(\Omega)}$. Dann besitzt f ein multiplikatives Inverses f^{-1} und folglich ist

$$g = f^{-1} \cdot f \cdot g = f^{-1} \cdot 0_{\mathcal{M}(\Omega)} = 0_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Bemerkung. Wir haben verwendet, dass $x \cdot 0 = 0$. Dies ist leicht zu zeigen in jedem Ring.