Lösungen Serie 9

Argumentprinzip, Satz von Rouché, Offenheitssatz

1. Sei f eine meromorphe Funktion auf einem beschränken Gebiet D mit stückweise glattem Rand. Die Funktion f lasse sich analytisch auf ∂D fortsetzen und habe keine Nullstellen auf ∂D.

   (a) Zeigen Sie, dass f in D nur endlich viele Nullstellen und Polstellen besitzt.

   (b) Sei g holomorph auf einer offenen Menge $\Omega \supset \overline{D}$. Beweisen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{\substack{w\in D\\ \text{Null- oder}\\ \text{Polstelle von } f}} n_w\cdot g(w),$$

   wobei n_w bzw. $-n_w$ die Ordnung von w als Null- bzw. Polstelle von f bezeichnet.

   (c) Zeigen Sie mithilfe von Teil (b), dass die Integrale

$$I_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_2(0)} \frac{z^n}{z^2-z-1}\,\mathrm{d}z, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

   die Rekursion der Fibonacci Zahlen erfüllen, nämlich

$$I_0 = 0, \quad I_1 = 1 \quad \text{und} \quad I_n = I_{n-1} + I_{n-2} \text{ für } n \geqslant 2.$$

   Folgern Sie daraus wieder mit Teil (b) eine geschlossene Formel für die n-te Fibonacci Zahl, das heisst, berechnen Sie I_n.

Lösung.

(a) Da f meromorph ist, kann die Menge aller Nullstellen von f in D nur am Rand ∂D einen Häufungspunkt besitzen; dies ist aber nicht der Fall, denn die analytische Fortsetzung von f zu $\bar{D} = D\cup\partial D$ besitzt keine Nullstellen in ∂D. Da D beschränkt ist, muss f also endlich viele Nullstellen haben.

Die Polstellen von f in D können sich ebenfalls nirgendwo häufen, weil f meromorph ist und sich *analytisch* zu ∂D fortsetzen lässt. Nochmals folgt die Endlichkeit dieser Menge aus der Beschränktheit von D.

(b) Sei S die (nach Teil (a) endliche) Menge der paarweise verschiedenen Null- und Polstellen von f in D. Schreibe

$$f(z) = \prod_{w \in S} (z-w)^{n_w} h(z).$$

Die Funktion $h(z)$ ist holomorph auf D und verschwindet dort nirgends. Weiter gilt durch Anwenden der Produktregel

$$f'(z) = \sum_{w \in S} \frac{n_w}{z-w} f(z) + h'(z) \frac{f(z)}{h(z)}$$

und damit

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{w \in S} n_w \frac{g(z)}{z-w} + g(z)\frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Für $r > 0$ klein genug betrachte $D_r := D \setminus \bigcup_{w \in S} B_r(w)$ wobei $w_j \notin \overline{B_r(w_k)}$ für $w_j \in S \setminus \{w_k\}$. Da g auf D holomorph ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz und der Cauchyschen Integralformel für alle $w_j, w_k \in S$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w_j)} \frac{g(z)}{z-w_k} \, \mathrm{d}z = \delta_{jk} \cdot g(w_k) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w_j)} g(z) \frac{h'(z)}{h(z)} \, \mathrm{d}z = 0.$$

Da $g\frac{f'}{f}$ auf D_r holomorph ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \sum_{w \in S} \int_{\partial B_r(w)} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{w \in S} \int_{\partial B_r(w)} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{w \in S} n_w \cdot g(w).$$

(c) Seien $\varphi := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $\psi := \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ sowie $f(z) = \dfrac{z-\varphi}{z-\psi}$. Dann ist

$$f'(z) = \frac{\varphi - \psi}{(z-\psi)^2} = \frac{\sqrt{5}}{(z-\psi)^2},$$

also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\sqrt{5}}{(z-\psi)(z-\varphi)} = \frac{\sqrt{5}}{z^2 - z - 1}$$

und damit

$$I_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(0)} z^n \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z.$$

Die Funktion f besitzt genau die Nullstelle φ und die Polstelle ψ in D, beide erster Ordnung, und mit $D := B_2(0)$ erfüllen f und $g_n(z) := z^n$ die Bedingungen von Teil (b). Also ist

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 \quad \text{und} \quad I_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi - \psi) = 1.$$

Für $n \geqslant 2$ berechnen wir

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} - I_{n-2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(0)} \underbrace{(z^n - z^{n-1} - z^{n-2})}_{= z^{n-2}\sqrt{5}\frac{f(z)}{f'(z)}} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2(0)} z^{n-2} \, \mathrm{d}z = 0. \end{aligned}$$

Also ist I_n die n-te Fibonacci Zahl und es gilt wieder nach Teil (b)

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \in \mathbb{N}_0.$$

2. Zeigen Sie, dass $2z^5 + 6z - 1$ eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$ und vier Nullstellen im Kreisring $\{1 < |z| < 2\}$ besitzt.

   Lösung. Sei $p(z) := 2z^5 + 6z - 1$. Es gilt $p(0) = -1$ und $p(1) = 7$, also besitzt p nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$.

   Für die weiteren Nullstellen wollen wir den Satz von Rouché verwenden. Seien $f_1(z) := 2z^5 - 1$ und $h_1(z) := p(z) - f_1(z) = 6z$. Dann gilt für alle z mit $|z| = 2$:

$$|f_1(z)| = \left|2z^5 - 1\right| \geqslant 2|z|^5 - 1 = 63 > 12 = 6|z| = |h_1(z)|.$$

   Da f_1 und h_1 ganze Funktionen sind, folgt aus dem Satz von Rouché, dass f_1 und $p = f_1 + h_1$ dieselbe Anzahl Nullstellen in $\{|z| < 2\}$ haben. In dieser Menge besitzt $f_1(z) = 2z^5 - 1$ fünf Nullstellen (mit Multiplizität).

   Setze nun $f_2(z) := 6z - 1$ und $h_2(z) := p(z) - f_2(z) = 2z^5$ setzen, dann gilt für alle z mit $|z| = 1$

$$|f_2(z)| = |6z - 1| \geqslant 6|z| - 1 = 5 > 2 = 2|z|^5 = |h_2(z)|.$$

   Wieder aus dem Satz von Rouché folgt, dass $p = f_2 + h_2$ und f_2 dieselbe Anzahl Nullstellen in $\{|z| < 1\}$ besitzen, nämlich eine. Schliesslich bemerken wir, dass p keine Nullstellen auf dem Einheitskreis $\{|z| = 1\}$ haben kann, denn dort gilt

$$|P(z)| \geqslant 6|z| - 2|z|^5 - 1 = 3.$$

   Somit bleiben vier Nullstellen übrig im Kreisring $\{1 < |z| < 2\}$.

3. Zeigen Sie, dass das Polynom $z^4 + 2z^2 - z + 1$ genau eine Nullstelle in jedem Quadranten besitzt.

Hinweis. Beweisen Sie, dass dieses Polynom keine reellen Nullstellen besitzt und betrachten Sie ein Integral entlang eines Halbkreises in der rechten Halbebene.

Lösung. Sei $p(z) := z^4 + 2z^2 - z + 1$. Das Polynom p hat keine reelle Nullstellen, denn für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$p(x) = x^4 + 2x^2 - x + 1 > 0.$$

Dies folgt aus den Abschätzungen $x^4 + 2x^2 + 1 \geqslant 1 > x$ für $x < 1$, und $x^4 + 2x^2 > x$ für $x \geqslant 1$. Da die Koeffizienten von p reell sind, müssen die vier Nullstellen also paarweise komplex konjugiert sein. Ausserdem gilt für $z = iy$ auf der imaginären Achse

$$p(iy) = (y^4 - 2y^2 + 1) - iy = (y^2 - 1)^2 + i(-y);$$

daher liegt keine der Nullstellen von p auf der imaginären Achse. Wir zeigen nun mittels Argumentprinzip, dass p genau zwei Nullstellen in der rechten Halbebene besitzt. Diese müssen dann komplex konjugiert sein, also eine im ersten Quadranten und eine im vierten. Somit sind die übrigen Nullstellen in der linken Halbebene, und da sie auch komplex konjugiert sind, jeweils im zweiten und dritten Quadranten.

Sei D_R die (offene) Halbkreisscheibe $\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 < r < R; \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ in der rechten Halbebene, mit $R > \max\{|z| : z \text{ Nullstelle von } p\}$. Dann ist nach dem Argumentprinzip

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} \frac{p'(z)}{p(z)} \, \mathrm{d}z = N_R$$

die Anzahl Nullstellen von p in D_R, mit Multiplizität. Wir wollen also zeigen, dass $\lim_{R\to\infty} N_R = 2$ und berechnen hierzu das Integral.

Wir teilen ∂D auf, und zwar in die beiden Wege $\gamma_1 \colon [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto it$ und $\gamma_2 \colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$. Dann ist

$$N_\infty := \lim_{R\to\infty} N_R = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \frac{p'(z)}{p(z)} \, \mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{p'(z)}{p(z)} \, \mathrm{d}z,$$

und wir betrachten die beiden Integrale separat. Da $\operatorname{Re}(p(iy)) \geqslant 0$ und $p(iy) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, ist $p([-iR, iR]) \subset \mathbb{C} \smallsetminus (-\infty, 0]$. Somit ist für den Hauptzweig des Logarithmus die Komposition $\log p$ wohldefiniert und holomorph auf $i\mathbb{R}$, und dort eine Stammfunktion von $\frac{p'}{p}$. Also gilt

$$\int_{\gamma_1} \frac{p'(z)}{p(z)} \, \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} i \frac{p'(it)}{p(it)} \, \mathrm{d}t = i \log p \,\Big|_{-iR}^{iR} = i \log\left(\frac{R^4 - 2R^2 - iR + 1}{R^4 - 2R^2 + iR + 1}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Für den zweiten Weg bemerken wir, dass

$$iRe^{it}\frac{p'(Re^{it})}{p(Re^{it})} \xrightarrow{R\to\infty} 4i.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}N_\infty = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}\frac{p'(z)}{p(z)}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} iRe^{it}\frac{p'(Re^{it})}{p(Re^{it})}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\lim_{R\to\infty} iRe^{it}\frac{p'(Re^{it})}{p(Re^{it})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4i\,\mathrm{d}t = 2,\end{aligned}$$

wie behauptet.

4. Sei D ein beschränktes Gebiet, und seien f und h meromorphe Funktionen auf D, welche zu analytischen Funktionen auf ∂D fortgesetzt werden können. Man nehme an, dass $|h(z)| < |f(z)|$ auf ∂D ist. Zeigen Sie mittels eines Beispiels, dass f und $f+h$ unterschiedliche Anzahlen von Nullstellen auf D haben können. Was kann man über f und $f+h$ sagen? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

   Lösung. Seien $f(z) := 1$ und $h(z) := -2/(z+1)$. Dann ist $(f+h)(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Die Funktion f ist ganz; h und $f+h$ sind meromorph auf $\mathbb{C}$ (mit einem Pol an der Stelle $z=-1$). Es gilt für $|z| = 4$:

   $$|h(z)| = \frac{2}{|z+1|} \leqslant \frac{2}{|z|-1} = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3} < 1 = |f(z)|.$$

   Wenn der Satz von Rouché für meromorphe Funktionen gälte, dann sollten f und $f+h$ in $B_4(0)$ die selbe Anzahl von Nullstellen besitzen. Dies ist jedoch nicht so, denn $f+h$ hat eine Nullstelle bei $z=1$ und f besitzt keine Nullstelle.

   Für meromorphe Funktionen hat man die folgende Version des Satzes von Rouché:

   Sei D ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂D, und seien f und h meromorphe Funktionen auf $D \cup \partial D$. Wenn $|h(z)| < |f(z)|$ für $z \in \partial D$ ist, dann ist für f und für $f+h$ die Differenz zwischen der Summe der Multiplizitäten der Nullstellen und der Summe der Ordnungen der Polstellen gleich.

   Der Beweis dieser Aussage ist analog zu dem des Satzes von Rouché.

5. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $n \in \mathbb{N}$, so dass

   $$\#\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = w\} \leqslant n$$

für alle $w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ ist.

Hinweis. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit genau n Urbildern $z_1, \ldots, z_n$ unter f. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass jedes $z \in B_\delta(w)$ genau n Urbilder besitzt, die jeweils nahe bei einem der z_k liegen. Folgern Sie daraus, dass $z = 0$ keine wesentliche Singularität von $f(1/z)$ ist.

Lösung. Sei $n_0 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists w \in \mathbb{C}\colon \#f^{-1}(w) = k\} \leqslant n$ die maximale Anzahl Urbilder eines Punktes unter f; oBdA $n_0 = n$. Sei weiter $w \in \mathbb{C}$ mit n verschiedenen Urbildern $z_1, \ldots, z_n$, und sei $0 < r_0 < \frac{1}{2}\min_{i \neq j}\{|z_i - z_j|\}$. Nach dem Offenheitssatz (Kor. 4.3.1) gibt es für jedes $k = 1, \ldots, n$ jeweils $\delta_k > 0$ und $0 < r_k < r_0$ mit $B_{\delta_k}(w) \subset f(B_{r_k}(z_k))$. Dann hat für $\delta := \min_k\{\delta_k\}$ jedes $z \in B_\delta(w)$ genau n Urbilder (aufgrund der Maximalität von n) in der disjunkten Vereinigung $U := \bigcup_{k=1}^n B_{r_k}(z_k)$. Also ist $B_\delta(w)$ disjunkt zum Bild $f(\mathbb{C} \setminus U)$ (sonst gäbe es ein $z \in B_\delta(w)$ mit mehr als n Urbildern).

Wähle nun $r > 0$ mit $U \subset B_r(0)$ und betrachte die Funktion $F(z) := f(1/z)$. Nimm an, $z = 0$ sei eine wesentliche Singularität von F. Dann gilt nach Casorati-Weierstrass und der Wahl von r

$$\mathbb{C} = \overline{F(B_{\frac{1}{r}}(0) \setminus \{0\})} = \overline{f(\mathbb{C} \setminus B_r(0))} \subset \overline{f(\mathbb{C} \setminus U)} \subset \mathbb{C} \setminus B_\delta(w)$$

– Widerspruch. Also besitzt F in $z = 0$ keine wesentliche Singularität. Folglich existiert ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ so, dass die Laurentreihenentwicklung von F um 0 die Form

$$F(z) = \frac{a_{-\ell}}{z^\ell} + \ldots + \frac{a_1}{z} + a_0 + \sum_{m \geqslant 1} a_m z^m$$

hat, mit $a_{-\ell} \neq 0$. Andererseits ist f ganz und somit hat f um 0 die Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{m \geqslant 0} b_m z^m$. Damit ist $F(z) = f(1/z) = \sum_{m \geqslant 0} b_m z^{-m}$. Aus der Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung und mit Koeffizientenvergleich sehen wir, dass f ein Polynom vom Grad ℓ ist. Da das Polynom $f(z) - w$ n verschiedene Nullstellen besitzt, muss $f(z) - w$ und somit auch $f(z)$ mindestens Grad n haben, also ist $\ell \geqslant n$.

Nimm an, $\ell > n$. Dann hat mindestens eines der Urbilder $z_1, \ldots, z_n$ von w unter f Multiplizität > 1 als Nullstelle von $f(z) - w$, oBdA sei z_1 eine solche. Dann ist $0 = (f(z) - w)'|_{z = z_1} = f'(z_1)$ und nach Lemma 4.3.1 existieren $\varepsilon, R > 0$, so dass jedes $\tilde{w} \in B_\varepsilon(w)$ mindestens zwei verschiedene Urbilder $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in B_R(z_1)$ besitzt. Mit δ und r_k, $k = 2, \ldots, n$ aus obigem Teil der Lösung setze $\delta' = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Dann besitzt jedes $\tilde{w} \in B_{\delta'}(w)$ in jedem Ball $B_{r_k}(z_k)$ ein Urbild, und in $B_R(z_1)$ deren zwei. Aber dann ist die Anzahl Urbilder von $\tilde{w}$ mindestens $n + 1$, Widerspruch. Also ist f ein Polynom vom Grad n.