Probeprüfung

1. [6 Punkte]

   Bestimmen Sie die Typen der isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen. Für alle Pole bestimmen Sie zusätzlich die Ordnung.

   (a) $\dfrac{e^z - 1}{z}$

   (b) $\dfrac{1}{\sin^2(z)}$

   (c) $\exp(z + z^{-1})$

2. [6 Punkte]

   Berechnen Sie folgende Integrale.

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\cos(t)}\,\mathrm{d}t$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

3. [6 Punkte]

   Sei $0 < a < 1$. Berechnen Sie mit Begründung aller Schritte das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

4. [6 Punkte]

   (a) Sei f holomorph in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung $|f^{(n)}(0)| > n! n^n$ niemals für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten kann.

   (b) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität bei $z = 0$. Besitzt $f(z)^2$ dann eine wesentliche Singularität bei 0? Wie ist es bei $f(z)g(z)$? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

5. [6 Punkte]

   (a) Gibt es für untenstehende Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit Nullstellenmenge $N := \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$? Geben Sie jeweils ein Beispiel oder einen Beweis, dass f nicht existieren kann.

      (i) $\Omega = B_1(0)$

      (ii) $\Omega = B_2(0)$

   (b) Gibt es in den folgenden Fällen jeweils eine biholomorphe Abbildung zwischen den angegebenen Mengen? Begründen Sie Ihre Antwort.

      (i) $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re}(z) = 0\} \to \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$

      (ii) $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to B_1(0) \setminus \{0\}$

6. [6 Punkte]

   Beweisen Sie das Schwarzsche Lemma:

   Sei $B := B_1(0)$ und sei $f\colon B \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leqslant 1$ für alle $z \in B$. Dann gilt

   $$|f'(0)| \leqslant 1 \quad \textit{und} \quad |f(z)| \leqslant |z| \quad \textit{für alle } z \in B.$$

   Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B$, so ist $f(z) = cz$ linear für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Viel Erfolg!