Serie 1

Komplexe Zahlen, komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

1. (a) Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile sowie die Polarkoordinaten von

   (i) $\dfrac{2\sqrt{2}i}{i-1}$,

   (ii) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2018}$,

   (iii) $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \frac{6i-10}{4+i}.$$

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ und betrachten Sie für $z \in \mathbb{C}$ die lineare Gleichung

$$az + b\bar{z} + c = 0.$$

   Wann hat diese Gleichung genau eine Lösung?

3. Zeigen Sie, dass die Menge K der reellen 2×2-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

   mit Matrix-Addition und Matrix-Multiplikation ein Körper ist und zu $\mathbb{C}$ isomorph.

4. Zeigen Sie, dass der (Hauptzweig des) Logarithmus folgende Gleichung erfüllt:

$$\lim_{z \to 1} \frac{\log(z)}{z-1} = 1$$

5. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Zeigen Sie: Die Funktion

$$f^*\colon U^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in U\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

ist an der Stelle $\bar{z}_0$ komplex differenzierbar.

6. Seien $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Zeigen Sie:

   (a) Ist $f(U) \subset \mathbb{R}$, so gilt $f'(z_0) = 0$;

   (b) Ist $f(U) \subset \mathbb{S}^1$, so gilt $f'(z_0) = 0$.
   Hinweis. Sei $X := \mathrm{d}f(z_0)(\mathbb{R}^2)$ das Bild von $\mathrm{d}f(z_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Welche reelle Dimension hat X? Vergleiche X und $J(X)$, wobei $J\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Matrixdarstellung der Multiplikation mit i ist.