D-MATH | Funktionentheorie | HS 2018

Prof. Michael Struwe

Serie 10

Logarithmen und n-te Wurzeln

1. Sei log der Hauptzweig des Logarithmus. Für welche $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $n \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Identitäten?

   (a) $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$,

   (b) $\log(z^n) = n \log(z)$,

   (c) $\exp(\log(z)) = z$,

   (d) $\log(\exp(z)) = z$,

   (e) $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Zeigen Sie: Es existiert ein Zweig von $\log f$ auf Ω genau dann, wenn

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

   für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1], \Omega)$.

3. (a) Seien $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$. Für eine offene und zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$ betrachte

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C},\ z \mapsto (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}.$$

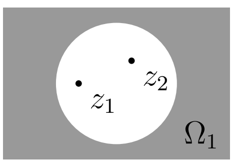
   Zeigen Sie, dass ein Zweig von $\log f$ existiert, genau dann, wenn

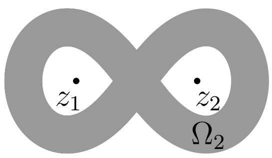
$$m_1 \int_\gamma \frac{1}{z - z_1}\,\mathrm{d}z + \ldots + m_r \int_\gamma \frac{1}{z - z_r}\,\mathrm{d}z = 0,$$

   für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1], \Omega)$.

   (b) Entscheiden Sie, ob ein Zweig von $\log f_i$ auf Ω_j existiert für $i, j = 1, 2$ und

   (i) $f_1(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, (ii) $f_2(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$.





4. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und beschränkt und $B \subset \bar{B} \subset \Omega$ ein Ball. Seien $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit
$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$
für alle $z \in \partial B$. Zeigen Sie, dass f und g in B dieselbe Anzahl von Nullstellen mit Multiplizität besitzen.

Hinweis. Zeigen Sie, dass ein Zweig von $\log \frac{f}{g}$ existiert.

5. (a) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $f^2 + g^2 \equiv 1$ mit $f, g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz.

   (b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $f \colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine holomorphe n-te Wurzel von f, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $h \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $h(z)^n = f(z)$.

   (c) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, die 0 enthält, und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ der 0, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $g_n : U \to \mathbb{C}$ existiert mit $f(z^n) = f(0) + (g_n(z))^n$ für alle $z \in U$.

6. Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $\varphi \in C^0(\Omega, \tilde{\Omega})$ heisst *Homöomorphismus*, falls φ bijektiv ist und die Umkehrabbildung φ^{-1} ebenfalls stetig ist. Zeigen Sie:

   Existiert eine Homöomorphismus $\varphi \colon \Omega \to \tilde{\Omega}$, so ist Ω einfach zusammenhängend genau dann, wenn $\tilde{\Omega}$ einfach zusammenhängend ist.