Serie 11

SATZ VON JENSEN, WACHSTUMSORDNUNG GANZER FUNKTIONEN, SATZ VON PHRAGMÉN-LINDELÖF, UNENDLICHE PRODUKTE

1. Beweisen Sie die Wallissche Produktformel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdots .$$

Hinweis. Verwenden Sie Eulers Produktformel.

2. Sei $f\colon B_1(0)\to\mathbb{C}$ holomorph, beschränkt und nicht konstant gleich Null, und seien $z_1, z_2, \dots$ die Nullstellen von f. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert

$$\lim_{R\to 1}\int_0^{2\pi}\log\left|f(Re^{i\theta})\right|\,\mathrm{d}\theta$$

existiert, so ist

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|z_n|)<\infty.$$

Hinweis. Schreiben Sie $1-|z_n|=\int_{|z_n|}^1 \mathrm{d}r$ und schätzen Sie die Partialsummen ab unter Verwendung der Formel von Jensen.

3. Sei S der Streifen $S:=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<\mathrm{Im}(z)<1\}$ und sei $F\in C^0(\bar{S},\mathbb{C})$ holomorph und beschränkt auf S.

   (a) Zeigen Sie: Falls $|F(z)|\leqslant 1$ auf dem Rand, so ist $|F(z)|\leqslant 1$ auf ganz S.
   Hinweis. Wenden Sie das Maximumsprinzip auf $F_\varepsilon(z):=F(z)e^{-\varepsilon(z^2+1)}$ an.

   (b) Sei allgemeiner $M_0:=\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x)|$ und $M_1:=\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x+i)|$. Zeigen Sie: Für $y\in[0,1]$ gilt

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x+iy)|\leqslant M_0^{1-y}M_1^y.$$

   Hinweis. Betrachten Sie $M_0^{-iz-1}M_1^{iz}F(z)$ und behandeln Sie den Fall $M_0=0$ oder $M_1=0$ gesondert.

4. Finden Sie die Wachstumsordnung der folgenden ganzen Funktionen.

(a) $p(z)$ ein Polynom, (b) e^{bz^n} mit $b \neq 0$, (c) e^{e^z}.

5. Sei $t > 0$ fix und setze

$$F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n t} e^{2\pi i z}).$$

Dann ist F eine ganze Funktion. Zeigen Sie:

(a) F hat Wachstumsordnung höchstens 2.

(b) F verschwindet genau dann, wenn $z = m - int$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ und $n \geqslant 1$.

(c) Für die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots$ von F gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|z_k|^2} = \infty, \quad \text{aber} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{|z_k|^{2+\varepsilon}} < \infty \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Folgern Sie, dass F Wachstumsordnung 2 besitzt.

Hinweis. Um Teil (a) zu zeigen, schreiben Sie $F(z) = F_1(z) F_2(z)$ mit

$$F_1(z) := \prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-2\pi n t} e^{2\pi i z}) \quad \text{und} \quad F_2(z) := \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n t} e^{2\pi i z}).$$

Wählen Sie $N \approx c\,|z|$ mit c gross genug. Dann ist $|F_2(z)| \leqslant A$ wegen

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2\pi n t} \right) e^{2\pi |z|} \leqslant 1.$$

Andererseits gilt für alle $n \leqslant N$:

$$\left| 1 - e^{-2\pi n t} e^{2\pi i z} \right| \leqslant 1 + e^{2\pi |z|} \leqslant 2 e^{2\pi |z|}.$$

Für Teil (c) verwenden Sie ein Integralkriterium im Zweidimensionalen.