Serie 12

Die Gamma- und Zetafunktionen

1. Seien $a, b > 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass

   $$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)}.$$

   Hinweis. Verwenden Sie Lemma 5.4.1 und zeigen Sie, dass für alle $N \geqslant 1$ die Partialprodukte P_N die folgende Gleichung erfüllen:

   $$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = P_N \cdot \frac{\Gamma(a+N+1)\Gamma(b+N+1)}{N!\Gamma(a+b+N+1)}.$$

   (b) Verwenden Sie Teil (a), Lemma 5.4.1 und die Produktformel für $\sin(\pi s)$ für einen weiteren Beweis der Identität

   $$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

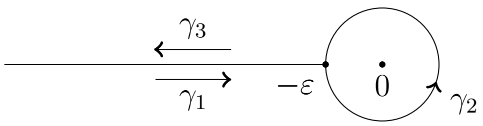
2. Wie Sie aus der Vorlesung wissen, ist die Gammafunktion $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \,\mathrm{d}t$ eine für $\mathrm{Re}(s) > 0$, und die Zetafunktion $\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ eine für $\mathrm{Re}(s) > 1$ wohldefinierte holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

   $$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \,\mathrm{d}t.$$

   Hinweis. Sei $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 1$. Finden Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und $L > 0$ so, dass die folgenden Ausdrücke $< \varepsilon$ sind:

   $$\int_L^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} \,\mathrm{d}t \cdot \zeta(\sigma), \quad \int_L^\infty \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1} \,\mathrm{d}t, \quad \int_0^\delta e^{-t} t^{\sigma-1} \,\mathrm{d}t \cdot \zeta(\sigma) \quad \text{und} \quad \int_0^\delta \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1} \,\mathrm{d}t.$$

3. Für $0 < \varepsilon < 2\pi$ betrachten wir den folgenden Weg $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$



mit γ_1 der Weg von $-\infty$ nach $-\varepsilon$, γ_2 der Kreis mit Radius ε um den Ursprung, und γ_3 der Weg von $-\varepsilon$ nach $-\infty$. Wir setzen $z^{s-1} = e^{(s-1)\log z}$ für den Hauptzweig von $\log z$ längs γ_2, für $\log(-e^u) = u - \pi i$ längs γ_1, und $\log(-e^u) = u + \pi i$ längs γ_3, wobei u reell sei. Für $s \in \mathbb{C}$ sei

$$I_\varepsilon(s) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z.$$

(a) Zeigen Sie, dass I_ε eine ganze Funktion in s ist.
Hinweis. Betrachten Sie die Integrale über γ_j, $j = 1, 2, 3$, einzeln und für $\int_{\gamma_1} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z$ zunächst das Integral $f_n(s) = \int_{\gamma_1(n)}^{\varepsilon} \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,\mathrm{d}z$, wobei $\gamma_1(n)$ der (endliche) Weg von $-n$ bis $-\varepsilon$ entlang der reellen Achse ist.

(b) Zeigen Sie, dass I_ε nicht von ε abhängt.
Hinweis. Betrachten Sie für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 2\pi$ fix und $\delta > 0$ den Rand der Menge $G_\delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) \in (-\delta, \delta)\}$.

(c) Zeigen Sie: $\int_{\gamma_2}(z^{s-1})(e^{-z}-1)^{-1}\,dz \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, falls $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist.

(d) Verwenden Sie Aufgabe 2, um zu zeigen, dass für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}\cdot\Gamma(s)\cdot\zeta(s).$$

(e) Zeigen Sie mittels Teil (d), dass $\zeta(s)$ nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar ist, bei $s = 0$ holomorph ist, und bestimmen Sie den Wert $\zeta(0)$.

(f) In Teil (e) "berechnen" wir $1 + 1 + 1 + \cdots = \lim_{s\to 0}(1 + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots) = \zeta(0) = \ldots$. Berechnen Sie sinngemäss "$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$".