Serie 13

Der Riemannsche Abbildungssatz

1. Sei $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ die rechte Halbebene und $\Omega_2 := \Omega_1 \cap \mathbb{H}$ der erste Quadrant. Sei weiter Ω_3 der Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-1, 1)\}$ und $\Omega_4 := \Omega_3 \cap \mathbb{H}$. Schliesslich sei $\Omega_5 := \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$. Wir definieren für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ die Funktionen $f_i \colon \Omega_i \to \mathbb{D}$ wie folgt:

$$f_1(z) := \frac{z-1}{z+1}, \quad f_2(z) := \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z^2 - i}{z^2 + i}, \quad f_3(z) := \frac{e^{\pi z/2} - 1}{e^{\pi z/2} + 1},$$

$$f_4(z) := \frac{e^{\pi z} - i}{e^{\pi z} + i}, \quad f_5(z) := \frac{1}{i} \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1}.$$

Zeigen Sie, dass diese fünf Abbildungen biholomorph sind. Es gibt für jede dieser Funktionen einen Punkt z_i mit $f_i(z_i) = 0$. Bestimmen Sie jeweils z_i und die Ableitung in diesem Punkt.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, einfach zusammenhängend und nicht leer. Weiter seien $z_0 \in \Omega$ reell und $f \colon \Omega \to \mathbb{D}$ die eindeutige biholomorphe Abbildung aus dem Riemannschen Abbildungssatz, mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.

   (a) Zeigen Sie mithilfe der Eindeutigkeit von f: Ist Ω symmetrisch bezüglich der reellen Achse, so gilt

   $$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

   (b) Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für den Fall, dass Ω bezüglich z_0 punktsymmetrisch ist.

3. Zeigen Sie, dass der Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0, |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ unter der Funktion $f(z) := \sin(z)$ biholomorph auf die obere Halbebene abgebildet wird. Untersuchen Sie zudem das Verhalten von f auf dem Rand des Streifens.

   Hinweis. Die Funktion f lässt sich als Komposition der Abbildungen $z \mapsto e^{iz}$, $z \mapsto iz$ und $z \mapsto -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ schreiben; und $z \mapsto e^{iz}$ bildet den Streifen S auf die Halbkreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0, |z| < 1\}$ ab.

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k$ beschränkt sind. Zeigen Sie, dass die Dirichlet Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$ konvergiert und dort eine holomorphe Funktion definiert.

Hinweis. Für $n \geqslant 1$ sei $A_n := a_1 + \ldots + a_n$. Betrachten Sie die Partialsummen der (absolut konvergenten) Reihe $\sum A_n(n^{-s} - (n+1)^{-s})$ und leiten Sie eine Beziehung zu den analogen Partialsummen der Dirichlet-Reihe her. Der Mittelwertsatz liefert eine Abschätzung für den Term $n^{-s} - (n+1)^{-s}$. Um zu beweisen, dass die Reihe eine holomorphe Funktion definiert, zeigen Sie, dass die Partialsummen auf jeder kompakten Teilmenge der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ gleichmässig konvergieren.

Keine Abgabe!