Serie 2

Möbiustransformationen, analytische und holomorphe Funktionen, harmonische Funktionen

1. Sei $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ drei verschiedene Punkte.

   (a) Finden Sie eine Möbiustransformation $\varphi := \varphi_{z_0,z_1,z_2} \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, so dass

   $$\varphi(z_0) = 0, \qquad \varphi(z_1) = 1, \qquad \varphi(z_2) = \infty.$$

   (b) Für ein weiteres $z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ definieren wir das Doppelverhältnis der vier Punkte:

   $$w(z_0, z_1, z_2, z_3) := \varphi_{z_0,z_1,z_2}(z_3).$$

   Zeigen Sie, dass für jede weitere Möbiustransformation $\psi \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ gilt:

   $$w(\psi(z_0), \psi(z_1), \psi(z_2), \psi(z_3)) = w(z_0, z_1, z_2, z_3).$$

2. (a) Zeigen Sie, dass für eine Möbiustransformation $\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ das Urbild der reellen Gerade $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann auch eine Gerade ist, wenn $a\bar{c} = \bar{a}c$. Zeigen Sie desweiteren, dass andernfalls das Urbild von $\overline{\mathbb{R}}$ ein Kreis ist.

   (b) Folgern Sie, dass z_0, z_1, z_2, z_3 genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden liegen, wenn ihr Doppelverhältnis $w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ reell ist.

   (c) Folgern Sie weiter, dass jede Möbiustransformation jede Gerade und jeden Kreis wiederum auf eine Gerade oder einen Kreis abbildet.

3. (a) Leiten Sie die Polarform der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen her:

   $$\partial_r u = \frac{1}{r}\partial_\vartheta v, \qquad \partial_\vartheta u = -r\partial_r v.$$

   (b) Verwenden Sie diese Gleichungen, um direkt zu zeigen, dass der Hauptzweig des Logarithmus

   $$\log \colon \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 0]\} \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \quad z \mapsto \log|z| + i \arg z$$

   holomorph ist.

4. Welche dieser Funktionen können Realteil einer analytischen Funktion auf $\mathbb{C}$ sein? Geben Sie diese gegebenenfalls an:

   (a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$

   (b) $u(x, y) = e^x \sin(y)$

   (c) $u(x, y) = e^x \sinh(y)$

5. Seien $u \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ harmonisch und $f \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ holomorph. Zeigen Sie: $u \circ f$ ist harmonisch.