Serie 3

Kurvenintegrale, Satz von Goursat

1. Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_\gamma f(z)dz$ für folgende Funktionen f und Wege $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$:

   (a) $f(z) = e^z$ und $\gamma\colon t \mapsto 3e^{\pi i t}$,

   (b) $f(z) = \overline{z}$ und $\gamma\colon t \mapsto \frac{1}{t+1} + 2it$,

   (c) $f(z) = \cos(\mathrm{Re}(z))$ und $\gamma\colon t \mapsto i + e^{2\pi i t}$,

   (d) $f(z) = \sin(z)$ und $\gamma\colon t \mapsto t + it$,

   (e) $f(z) = e^{\sin(z)} z^{-1}$ und γ eine Parametrisierung des Rands eines beliebigen konvexen Polygons in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Wegintegral $\int_\gamma f(z)dz$ der Funktion $f(z) = (z - z_0)^{-n}$ längs $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{2\pi i t}$.

3. Zeigen Sie:
$$\int_0^{2\pi} \cos(x)^{2n} dx = 2^{1-2n} \binom{2n}{n} \pi.$$

   Hinweis: Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma z^{-1}(z+z^{-1})^{2n} dz$ unter Verwendung der Aufgabe 2.

4. Sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und $\partial B_R(a)$ der Kreis um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $R > 0$ (im Gegenuhrzeigersinn orientiert). Zeigen Sie:
$$\int_{\partial B_R(a)} P(\overline{z})\, dz = 2\pi i R^2 P'(\bar{a})$$

   Hinweis. Es genügt, die Aussage für Polynome der Form $P_k(X) := (X - \bar{a})^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen – weshalb?

5. Finden Sie einen einfachen Beweis des Satzes von Goursat für Rechtecke (Korollar 3.2.1 der Vorlesung) unter der zusätzlichen Annahme, dass $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, also f holomorph.