Serie 4

Wegintegrale, Integralsatz und Integralformel von Cauchy

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $|f(z) - 1| < 1$ für alle $z \in \Omega$, und $\gamma : [a, b] \to \Omega$ eine glatte, geschlossene Kurve. Zeigen Sie, dass
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = 0.$$

2. Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.
   (a) Für $R > 0$ definiere man $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$. Man zeige
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1} = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1}.$$
   (b) Zeigen Sie, dass für $R > 1$ das Integral
$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1}$$
   von R unabhängig ist.
   (c) Verwenden Sie die Cauchy'schen Integralsatz und Integralformel und Partialbruchzerlegung, um für grosse R
$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 1}$$
   zu berechnen.

3. (Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra) Zeigen Sie, dass ein Polynom ohne Nullstellen konstant ist, indem Sie den Cauchy'schen Integralsatz anwenden.

   Hinweis: Wenn $P(z)$ ein nicht konstantes Polynom ist, dann lässt es sich darstellen als $P(z) = P(0) + zQ(z)$. Teilen Sie durch $zP(z)$ und integrieren Sie über einen grossen Kreis. Dies ergibt einen Widerspruch, wenn P keine Nullstellen besitzt.

4. Zeigen Sie:
$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Wegintegral der Funktion e^{iz^2} entlang des Rands eines $\frac{\pi}{4}$-Kreissektors mit Radius R, und berechnen Sie den Grenzwert für $R \to \infty$.

5. Zeigen Sie:
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Hinweis. Verwenden Sie einen halben Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R\}$.