Serie 5

Korollare der Integralformel von Cauchy

1. (a) Berechnen Sie für folgende Funktionen die Taylorreihe bei z_0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

$$\text{(ii)} \quad z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{für } z_0 = 1 \qquad \text{(ii)} \quad z \mapsto \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \quad \text{für } z_0 = 0$$

   (b) Was ist der Konvergenzradius der Taylorreihe der Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbb{C}$?

2. Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$ sowie $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und nichtleer und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Fortsetzung von f ist ein Paar (g, Ω_g) mit $\Omega \subset \Omega_g$ und $g|_\Omega = f$.

   (a) Zeigen Sie: Es existiert eine maximale holomorphe Fortsetzung (g, Ω_g) von f mit Ω_g offen und zusammenhängend.

   (b) Konstruieren Sie eine maximale Fortsetzung der Gammafunktion

$$\Gamma\colon \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\} \to \mathbb{C}, \quad s \mapsto \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

   Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien r und C zwei positive reelle Zahlen. Für eine ganze Funktion f gelte die Abschätzung $|f(z)| \leqslant C\,|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geqslant r$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom von Grad höchstens n sein muss.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant. Zeigen Sie:

   (a) (Minimumsprinzip) Hat f ein lokales Betragsminimum in einem Punkt $a \in \Omega$, so ist $f(a) = 0$.

   (b) Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge mit nichtleerem inneren $\mathring{K}$ und sei der Betrag von f auf dem topologischen Rand $\partial K = K \setminus \mathring{K}$ konstant. Dann besitzt f eine Nullstelle in K.

6. Sei $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 < |z| < 2\}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

   (a) Beweisen Sie: Ist f beliebig genau durch Polynome approximierbar, so existiert eine holomorphe Fortsetzung auf $B_2(0)$.

   (b) Geben Sie ein Beispiel einer holomorphen Funktion auf Ω, die nicht beliebig genau durch Polynome approximiert werden kann.