Serie 6

Nullstellen und Isolierte Singularitäten

1. (a) Sei $f(z) := \sin(z^2)$. Finden Sie für jede Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ von f die Ordnung von z_0 als Nullstelle von f.

   (b) Sei $p(z) := 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ein Polynom. Bestimmen Sie die Ordnung von $z_0 = 0$ als Nullstelle der Funktion $f(z) := e^z - p(z)$ in Abhängigkeit von $p(z)$.

   (c) Sei $f(z) := \cos(z^3)^3$. Bestimmen Sie die Multiplizität, mit der f seinen Wert bei 0 annimmt.

2. Für die folgenden Funktionen behandle man die isolierte Singularität bei 0 wie folgt: Ist die Singularität hebbar, dann hebe man sie; ist sie ein Pol, bestimme man die Ordnung; ist sie wesentlich, so bestimme man für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ das Bild von $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ unter der Funktion.

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ (b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^n}$ für $n \in \mathbb{Z}$

   (c) $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ (d) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$

3. Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$ und seien $f, g : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Wir sagen, f habe die *algebraische Ordnung* $k \in \mathbb{Z}$ *an der Stelle* a, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z)$$

   in $\mathbb{C}$ existiert und nicht verschwindet.

   (a) Die algebraische Ordnung von f in a sei k, diejenige von g in a sei ℓ. Bestimmen Sie die möglichen algebraischen Ordnungen der Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f + g$.

   (b) Was lässt sich über die Singularität a der Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f + g$ aussagen, wenn f oder g oder gar beide in a eine wesentliche Singularität haben?

4. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ dicht ist in $\mathbb{C}$, d.h. $\forall z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : \exists w \in f(\mathbb{C}) : |z - w| < \varepsilon$.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend und beschränkt und sei $f \colon \Omega \to \Omega$ holomorph. Zeigen Sie:

   Falls ein Punkt $z_0 \in \Omega$ existiert mit $f(z_0) = z_0$ and $f'(z_0) = 1$, so ist f die Identität.

   Hinweis. Weshalb kann man $z_0 = 0$ annehmen? Schreiben Sie $f(z) = z + a_n z^n + O(z^{n+1})$ für z nahe 0 und zeigen Sie, dass $f_k(z) = z + k a_n z^n + O(z^{n+1})$ für die k-fache Verknüpfung $f_k := f \circ \ldots \circ f$. Schätzen Sie $f_k^{(n)}(0)$ für alle k ab.