Serie 7

Residuen und Anwendungen des Residuensatzes

1. Bestimmen Sie alle Singularitäten und wo vorhanden deren Residuen.

   (a) $\dfrac{z^3}{(1+z)^3}$ (b) $\dfrac{1}{e^z+1}$ (c) $\dfrac{e^z}{\sin(z)}$

   (d) $\dfrac{\log(1+z)}{z^2}$ bei Null, für einen beliebigen Zweig des Logarithmus.

2. Bestimmen Sie eine explizite Form für die durch den folgenden Ausdruck gegebene Funktion
$$f(w) := \frac{1}{\pi}\int_0^1 r\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\varphi}+w}\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r, \qquad w \in \mathbb{C},$$
berechnen Sie also für gegebenes $w \in \mathbb{C}$ das Integral $f(w)$. Ist f holomorph?

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > |b|$. Zeigen Sie:
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

4. (a) Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keinen Pol auf der reellen Achse besitzt. Zeigen Sie: Falls die Funktion $f(\frac{1}{z})$ bei 0 eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung besitzt, so gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a\, f.$$

   (b) Berechnen Sie das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4+6x^2+25}\,\mathrm{d}x.$$

5. (a) Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der reellen Achse besitzt. Zeigen Sie: Falls $f(\frac{1}{z})$ eine Nullstelle bei 0 besitzt, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a(f(z)e^{iz}).$$

(b) Berechnen Sie für $a > 0$ das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$$

6. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Falls der Realteil von f beschränkt ist, so ist f konstant.