Serie 8

Laurentreihen, isolierte Singularitäten, meromorphe Funktionen

1. Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung der folgenden Funktionen:
   (a) $f(z) = e^{z+z^{-1}}$ um 0.
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ um 0 und $-i$, in allen maximalen Konvergenzkreisringen.
   (c) $f(z) = \cot(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$ um 0 und bis Grad 3.

2. Sei $f(z) := (e^z - 1)/z^3$.
   (a) Bestimmen Sie den Hauptteil und das Residuum von f in 0.
   (b) Leiten Sie aus Teil (a) den Hauptteil und das Residuum von f^2 in 0 her.
   (c) Seien
   $$g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ und } h(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$
   holomorphe Funktionen auf der punktierten Kreisscheibe $B^* := B_r(0) \setminus \{0\}$ für ein $r > 0$. Bestimmen Sie das Residuum von gh in 0.

3. Sei a eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f. Zeigen Sie:
   (a) Die Funktion e^f kann keinen Pol in a haben.
   (b) Ist Real- oder Imaginärteil von f in einer Umgebung von a beschränkt, so ist die Singularität von f in a hebbar.

4. Bestimmen Sie alle biholomorphen Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
   Hinweis. Überprüfen Sie für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorph, dass $g(z) := f(1/z)$ eine ausserwesentliche Singularität in 0 besitzt, und vergleichen Sie f und g nahe 0.

Bitte wenden.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend.

   (a) Sei $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der meromorphen Funktions auf Ω. Wir definieren die punktweise Addition und Multiplikation zweier Elemente f und g in $\mathcal{M}(\Omega)$ als $(f+g)(z) := f(z) + g(z)$ und $(f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$ da, wo f und g beide definiert sind, unter Heben aller hebbaren Singularitäten. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(\Omega)$ bezüglich dieser Verknüpfungen ein Körper ist, d.h.

      (i) $(\mathcal{M}(\Omega), +)$ ist eine abelsche Gruppe:

         - $+$ ist assoziativ,
         - $\mathcal{M}(\Omega)$ besitzt ein (eindeutiges) neutrales Element $0_{\mathcal{M}(\Omega)}$ bezüglich $+$,
         - für jedes $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, existiert ein (eindeutiges) Inverses $-f \in \mathcal{M}(\Omega)$ bezüglich $+$,
         - $+$ ist kommutativ,

      (ii) $(\mathcal{M}(\Omega)^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe:

         - $\cdot$ ist assoziativ,
         - $\mathcal{M}(\Omega)^*$ besitzt ein (eindeutiges) neutrales Element $1_{\mathcal{M}(\Omega)}$ bezüglich $\cdot$,
         - für jedes $f \in \mathcal{M}(\Omega)^*$, existiert ein (eindeutiges) Inverses $f^{-1} \in \mathcal{M}(\Omega)^*$ bezüglich $\cdot$,
         - $\cdot$ ist kommutativ,

      (iii) $0_{\mathcal{M}(\Omega)} \neq 1_{\mathcal{M}(\Omega)}$,

      (iv) $\cdot$ ist distributiv bezüglich $+$, d.h. $\forall f, g, h \in \mathcal{M}(\Omega) : f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

      Hinweis. Einige dieser Eigenschaften folgen direkt aus der Tatsache, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation. Konzentrieren Sie sich auf die wesentlichen Teile.

   (b) Schliessen Sie aus Teil (a), dass für alle $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ gilt

$$\forall z \in U : f(z)g(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f \equiv 0 \text{ oder } g \equiv 0.$$