Serie 9

Argumentprinzip, Satz von Rouché, Offenheitssatz

1. Sei f eine meromorphe Funktion auf einem beschränken Gebiet D mit stückweise glattem Rand. Die Funktion f lasse sich analytisch auf ∂D fortsetzen und habe keine Nullstellen auf ∂D.

   (a) Zeigen Sie, dass f in D nur endlich viele Nullstellen und Polstellen besitzt.

   (b) Sei g holomorph auf einer offenen Menge $\Omega \supset \overline{D}$. Beweisen Sie die Gleichung
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{\substack{w\in D\\ \text{Null- oder}\\ \text{Polstelle von } f}} n_w \cdot g(w),$$
   wobei n_w bzw. $-n_w$ die Ordnung von w als Null- bzw. Polstelle von f bezeichnet.

   (c) Zeigen Sie mithilfe von Teil (b), dass die Integrale
   $$I_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_2(0)} \frac{z^n}{z^2-z-1}\,\mathrm{d}z, \quad n\in\mathbb{N}_0$$
   die Rekursion der Fibonacci Zahlen erfüllen, nämlich
   $$I_0 = 0, \quad I_1 = 1 \quad \text{und} \quad I_n = I_{n-1} + I_{n-2} \ \text{ für } n \geqslant 2.$$
   Folgern Sie daraus wieder mit Teil (b) eine geschlossene Formel für die n-te Fibonacci Zahl, das heisst, berechnen Sie I_n.

2. Zeigen Sie, dass $2z^5+6z-1$ eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$ und vier Nullstellen im Kreisring $\{1<|z|<2\}$ besitzt.

3. Zeigen Sie, dass das Polynom z^4+2z^2-z+1 genau eine Nullstelle in jedem Quadranten besitzt.

   Hinweis. Beweisen Sie, dass dieses Polynom keine reellen Nullstellen besitzt und betrachten Sie ein Integral entlang eines Halbkreises in der rechten Halbebene.

4. Sei D ein beschränktes Gebiet, und seien f und h meromorphe Funktionen auf D, welche zu analytischen Funktionen auf ∂D fortgesetzt werden können. Man nehme an, dass $|h(z)| < |f(z)|$ auf ∂D ist. Zeigen Sie mittels eines Beispiels, dass f und $f + h$ unterschiedliche Anzahlen von Nullstellen auf D haben können. Was kann man über f und $f + h$ sagen? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

5. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\#\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = w\} \leqslant n$$

für alle $w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ ist.

Hinweis. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit genau n Urbildern $z_1, \ldots, z_n$ unter f. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass jedes $z \in B_\delta(w)$ genau n Urbilder besitzt, die jeweils nahe bei einem der z_k liegen. Folgern Sie daraus, dass $z = 0$ keine wesentliche Singularität von $f(1/z)$ ist.