Funktionentheorie

Michael Struwe, ETHZ, HS 2018

<u>Ziel</u>: Aus der Verbindung von Konzepten der Differentialrechnung für Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Struktur der komplexen Multiplikation in $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$ entstehen spannende und tiefliegende neue Einsichten und auch für Anwendungen höchst wertvolle Resultate, wobei sich unerwartete Berührungspunkte mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (harmonische Funktionen) und der Zahlentheorie (Riemannsche Zeta-Funktion, Primzahlsatz) ergeben.

Inhalt

Literatur

Es gibt eine Vielzahl ausgezeichneter Lehrbücher zur komplexen Analysis. Die Vorlesung stützt sich vor allem auf die Titel

- D.A. Salamon: Funktionentheorie, Birkhäuser
- E.M. Stein & R. Shakarchi: Complex Analysis, Princeton Univ. Press.

1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (Wdhlg)

1.1 Der n-dim. euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

Der n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x^i)_{1 \le i \le n} = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \,;\; x^i \in \mathbb{R},\, 1 \le i \le n \right\}$$

mit der kanonischen Basis

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)^t, \quad 1 \le i \le n, \text{ [1]}$$

und der euklidischen Norm

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2}, \quad x = (x^i) \in \mathbb{R}^n,$$

ist ein vollständiger metrischer Raum bzgl. der Metrik

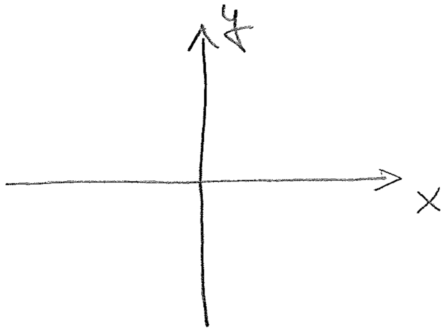
$$d(x,y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

---

[1] Bem.: Wir schreiben Vektoren $x = (x^i) \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

1.2 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$



Auf $\mathbb{R}^2$ können wir durch

$$(1.2.1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix}$$

eine Multiplikation einführen, welche assoziativ und kommutativ ist, und für die das Distributivgesetz gilt.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Einselement, und mittels

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto x \cdot e_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen algebraisch in den Körper $(\mathbb{R}^2, \cdot) =: \mathbb{C}$ eingebettet. Statt $x \cdot e_1$ schreiben wir daher einfach x für $x \in \mathbb{R}$.

Weiter gilt für die imaginäre Einheit

$$i := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

und wir erhalten die Darstellung

$$\mathbb{R}^2 \ni \binom{x}{y} = x \cdot e_1 + y e_2 = x + iy \in \mathbb{C}$$

für jedes Element von $\mathbb{C}$, wobei

$$x = \mathrm{Re}\,(x+iy) : \text{ Realteil},$$

$$y = \mathrm{Im}\,(x+iy) : \text{ Imaginärteil},$$

Mit der komplexen Konjugation

$$\mathbb{C} \ni z = x+iy \longmapsto \bar{z} : x - iy \in \mathbb{C}$$

erhalten wir eine isometrische lineare Involution auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit

$$z \cdot \bar{z} = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

die euklidische Norm von $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Insbesondere sehen wir, daß für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die komplexe Zahl $\bar{z}/|z|^2 \in \mathbb{C}$ die (eindeutig bestimmte) zu z multiplikativ inverse Zahl ist.

Weiter gilt offenbar

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

sowie

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \forall z = \binom{x}{y}, w = \binom{u}{v} \in \mathbb{C},$$

wie unmittelbar aus (1.2.1) folgt, und damit auch

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\overline{z}\, w \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Folglich konvergiert die <u>Exponentialfunktion</u>

$$\exp(w) = e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$$

für jedes $w \in \mathbb{C}$, und es gilt

$$\overline{e^w} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\frac{w^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{w}^k}{k!} = e^{\overline{w}}, \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Wir nennen $|z|$ den <u>Absolutbetrag</u> von z.

Polardarstellung.

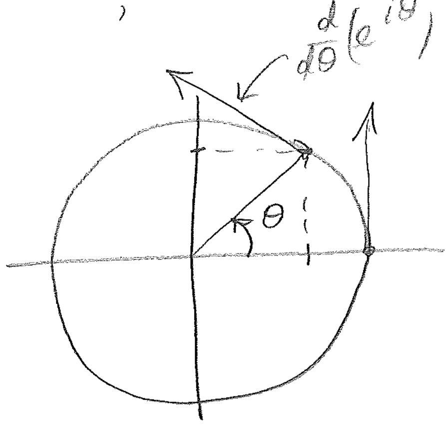
Insbesondere gilt

$$|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^0 = 1 \,, \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

und wegen

$$\left|\frac{d}{d\theta}\left(e^{i\theta}\right)\right| = |i e^{i\theta}| = |i| = 1,$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(e^{i\theta}\right)\Big|_{\theta=0} = i$$



durchläuft die Kurve

$$\mathbb{R} \ni \theta \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn mit Geschwindigkeit 1 (im Bogenmaß).

Es folgt

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \,, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

und jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine Darstellung

$$z = r e^{i\theta}$$

mit $r = |z|$ und $\theta \in \mathbb{R}$, wobei das <u>Argument</u> θ nur modulo 2π bestimmt ist.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$ können wir das Argument $-\pi < \theta < \pi$ normieren und erhalten so eine bijektive Abbildung

$$]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\ni (r, \theta) \mapsto z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]),$$

deren Umkehrabbildung den Hauptzweig des komplexen <u>Logarithmus</u>

$$\log : \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]) \to \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

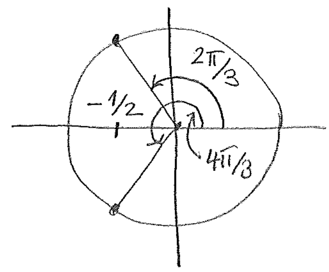
definiert mit $\log(z) := \log|z| + i \arg(z)$.

Die Polardarstellung vereinfacht viele Rechnungen erheblich.

<u>Beisp.:</u>

i) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{12} = \left(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12} = e^{2\pi i} = 1$

ii) $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^{3} = 1$



n-te Wurzel.

Für $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, lösen offenbar (genau) die Zahlen

$$w_j = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot j\right)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

die Gleichung

$$w_j^n = z, \quad 1 \leq j \leq n.$$

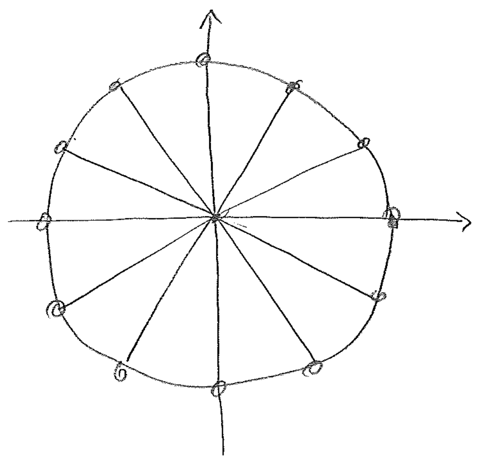
Insbesondere sind die Zahlen

$$e^{\frac{2\pi}{n} j \cdot i}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

die n verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$w^n = 1,$$

die n-ten Einheitswurzeln.



$n = 12$

2. Komplexe Differenzierbarkeit

2.1 Differenzierbare Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$

Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$, $x_0 \in \Omega$.

Def.: f ist diff.bar an der Stelle x_0, falls eine lineare Abb. $A = df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ existiert mit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + Ah)}{|h|} = 0 .$$

$A = df(x_0)$ heißt Differential von f an der Stelle x_0 oder Ableitung von f.

Äquivalent können wir schreiben

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

wobei

$$\frac{o(h)}{|h|} \to 0 \quad \text{für } 0 \neq h \to 0$$

Falls $f = (f^k)_{1 \leq k \leq l}$, so hat

$df(x_0)$ die Koordinatendarstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^l(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^l(x_0)}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

2.2 Komplex differenzierbare Funktionen

Wir verbinden nun Differenzierbarkeit mit der komplexen Struktur auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, und sei

$$f : \Omega \ni z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f(z) = u(z) + i v(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{C},$$

Def. 2.2.1. f heißt komplex differenzierbar ($\mathbb{C}$-diffbar) an der Stelle z_0, falls f an der Stelle z_0 (reell) diffbar ist mit $\mathbb{C}$-linearer Ableitung

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0) : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C},$$

wo $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc.

Welche Konsequenzen hat die zusätzliche Forderung der $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$?

Satz 2.2.1 (Cauchy-Riemann Glg.) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ reell diffbar. Dann ist f am Punkt z_0 $\mathbb{C}$-diffbar genau dann, wenn gilt

$$(2.2.1) \qquad u_x = v_y \, , \quad u_y = - v_x \, .$$

Zum <u>Beweis</u> bemerken wir zunächst, daß die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z = x + iy \mapsto iz = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

durch die reelle 2×2-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. $\mathbb{C}$-Linearität von

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0)$$

bedeutet damit, daß gilt

$$\forall\, h = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} : \ df(z_0) J h = J\, df(z_0) h .$$

Also ist die Bedingung

$$df(z_0) J = J\, df(z_0),$$

äquivalent zur $\mathbb{C}$-Linearität, ausgeschrieben also die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} u_y & -u_x \\ v_y & -v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x & -v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix},$$

Die Beh. folgt. $\square$

__Bem.:__ Falls

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

so ist die Matrix-Multiplikation mit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ äquivalent zur Multiplikation

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \longmapsto (a + ib) z \in \mathbb{C}$$

__Bew.:__ Rechne

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

$$\hat{=} (ax - by) + i (bx + ay)$$

$$= (a + ib)(x + iy).$$

$\square$

Falls für $df(z_0)$ also die CR-Glg (2.2.1) erfüllt sind, so ist Matrixmultiplikation mit $df(z_0)$ äquivalent zu komplexer Multiplikation mit

$$u_x + i v_x = v_y - i u_y.$$

Weitere, für die Rechnung hilfreiche Folgerungen sind im folgenden Satz zusammengetragen.

<u>Satz</u> 2.2.2. Sei $f: \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ am Punkt $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diff.bar. Dann existiert

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C},$$

und es gilt

$$(2.2.2) \quad f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

<u>Bew.:</u> Nach Annahme existiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abb. $A = df(z_0): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A \cdot \overset{e_1 = \binom{1}{0}}{\overset{\shortparallel}{1}} \right| = \frac{|f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)|}{|z - z_0|} \underset{\binom{z \to z_0}{z \neq z_0}}{\longrightarrow} 0.$$

Also existiert $f'(z_0)$ wie angegeben mit $f'(z_0) = A \cdot 1 \in \mathbb{C}$. Für $z = z_0 + h\binom{1}{0}$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$, $h \to 0$ erhält man $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$; für $z = z_0 + h\binom{0}{1}$, h wie oben folgt

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

$\square$

Umgekehrt ist jede der Bedingungen (2.2.1) oder (2.2.2) oder die Existenz von $f'(z_0)$ hinreichend für $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$.

<u>Satz</u> 2.2.3. Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ (reell) diffbar, und es gelte (2.2.1) oder (2.2.2) oder es existiere $f'(z_0)$. Dann ist $df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, f also $\mathbb{C}$-diffbar am Punkt z_0.

<u>Bew.</u>: i) Wie im Beweis von Satz 2.2.1 gezeigt, ist für $f = \binom{u}{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die Bedingung (2.2.1) äquivalent zur Bedingung $J\,df(z_0) = df(z_0)\,J$, welche wiederum äquivalent ist zur $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$.

ii) Mit
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}, \quad -i\frac{\partial f}{\partial y} = -J\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}$$
sieht man die Äquivalenz von (2.2.2) mit (2.2.1).

iii) Wie im Beweis von Satz 2.2.2 gezeigt, folgt aus der Existenz von $f'(z_0)$ die Bedingung (2.2.2).

$\square$

Beisp. 2.2.1. i) Jede konstante Funktion

$f(z) = c$ für $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-diffbar an

jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0.$

ii) Jede Potenz $f(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit

festem $n \in \mathbb{N}$ ist an jeder Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar

mit

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z_0^{n-k} = n z_0^{n-1}.$$

iii) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$.

Dann ist die Möbiusabbildung

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : \Omega = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}$$

an jeder Stelle $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diffbar, und

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{1}{z - z_0} \frac{(az + b)(cz_0 + d) - (az_0 + b)(cz + d)}{(cz + d)(cz_0 + d)}$$

$$= \frac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2}.$$

iv) Die lineare Funktion $z \mapsto \bar{z}$ ist an keiner Stelle $\mathbb{C}$-diffbar.

<u>Bew.:</u> Stelle dar

$$f: \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \bar{z} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}.$$

Mit

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

ist (2.2.1) an keiner Stelle z_0 erfüllt.

v) Die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto |z|^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist nur an der Stelle $z_0 = 0$ $\mathbb{C}$-diffbar.

<u>Bew.:</u> Da $f(z) = |z|^2$ reell, gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z), \frac{\partial f}{\partial y}(z) \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

also die Glg. (2.2.2) mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

genau dann, wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$.
Dies ist genau für $z_0 = 0$ der Fall.

2.3 Ableitungsregeln

Die folgenden Sätze ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen für Abbildungen $f: \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$, bzw. den Rechenregeln für Grenzwerte.

Satz 2.3.1. Sei $f: \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex diffbar an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann ist f an dieser Stelle stetig; d.h., es gilt

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Bew.: Mit Fehler $\frac{o(h)}{|h|} \to 0$ $(0 \neq h \in \mathbb{C},\ h \to 0)$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + df(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \underset{(z \to z_0)}{\longrightarrow} f(z_0). \qquad \square$$

Beisp. 2.3.1. Möbiustransformationen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}, \quad \text{wo } c \neq 0,$$

sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Satz 2.3.2. Seien $f, g : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diffbar. Dann gilt:

i) Die Funktion $f+g : \Omega \to \mathbb{C}$ ist an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0);$$

ii) die Funktion $f \overset{\mathbb{C}\text{- Mult.}}{\cdot} g : \Omega \to \mathbb{C}$ ist an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0);$$

iii) falls $g(z_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f/g : \Omega \setminus \{z;\, g(z)=0\} \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

Beisp. 2.3.2.i) Polynome $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind an jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar mit

$$f'(z_0) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, z_0^{k-1}, \quad z_0 \in \mathbb{C};$$

vgl. Beisp. 2.2.1.ii).

ii) Rationale Funktionen $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen $p, q \neq 0$ sind $\mathbb{C}$-diffbar an jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z;\ q(z) = 0\}$; vgl. auch Beisp. 2.2.1. iii).

Auch die Kettenregel gilt.

<u>Satz</u> 2.3.3. Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ mit $f(U) \subset V$ an der Stelle $z_0 \in U$ komplex diffbar, und sei $g: V \to \mathbb{C}$ an der Stelle $w_0 = f(z_0) \in V$ komplex diffbar.

Dann ist $g \circ f: U \to \mathbb{C}$ am Punkt z_0 komplex diffbar mit

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

<u>Bew.</u>: Für $z_k \xrightarrow{(k \to \infty)} z_0$, $z_k \neq z_0$ $(k \in \mathbb{N})$, erhalten wir

$$\frac{(g \circ f)(z_k) - (g \circ f)(z_0)}{z_k - z_0} = \frac{g(f(z_k)) - g(f(z_0))}{f(z_k) - f(z_0)} \; \frac{f(z_k) - f(z_0)}{z_k - z_0}$$

$$\to g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0),$$

falls $f(z_k) \neq f(z_0)$ $(k \in \mathbb{N})$, bzw. $\to 0 = f'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$ sonst. $\square$

2.4 Holomorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Def. 2.4.1. i) f heißt analytisch, falls f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex diff'bar ist.

ii) f heißt holomorph, falls f analytisch ist und die Funktion $z \mapsto f'(z)$ auf Ω stetig ist (d.h., falls f analytisch und von der Klasse C^1).

Bem. 2.4.1. Eines der großen Wunder der Funktionentheorie ist die Tatsache, daß analytische Funktionen automatisch von der Klasse C^1, also holomorph, sind. Wir werden dies bald zeigen; einstweilen aber müssen wir die obige Unterscheidung peinlich beachten!

Für holomorphe Funktionen gilt der Umkehrsatz.

<u>Satz 2.4.1</u>. Sei $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $f'(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es offene Umgebungen U von z_0, V von $f(z_0) =: w_0$ und eine holomorphe Funktion $g: V \to \mathbb{C}$ mit

$$(g \circ f)(z) = z, \quad z \in U,$$
$$(f \circ g)(w) = w, \quad w \in V,$$

und

$$g'(f(z)) = 1/f'(z), \quad z \in U,$$
$$g'(w) = 1/f'(g(w)), \quad w \in V.$$

<u>Bew.</u>: Schreibe $f = \binom{u}{v} : \Omega \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Mit Satz 2.2.1 folgt

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix},$$

mit Satz 2.2.2 also

$$\det(df(z_0)) = u_x^2 + v_x^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right|^2 = |f'(z_0)|^2 > 0.$$

Der Umkehrsatz für die C^1 Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liefert somit offene Umgebungen $U \subset \Omega$ von z_0, $V \subset \mathbb{R}^2$ von $w_0 = f(z_0)$ und eine C^1 Funktion $g : V \to U$ mit

$$g \circ f = id|_U \ , \quad f \circ g = id|_V \ ,$$

und

$$dg(w_0) = \left(df(z_0)\right)^{-1} .$$

Weiter folgt mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -J^{-1}$ aus der $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$ auch

$$dg(w_0)\, J = \left(J^{-1} df(z_0)\right)^{-1} = -\left(J\, df(z_0)\right)^{-1}$$

$$= -\left(df(z_0)\, J\right)^{-1} = J\, dg(w_0) \ ,$$

und damit, daß g $\mathbb{C}$-diffbar.

$\square$

Beisp. 2.4.1. i) Nach Beisp. 2.2.1. iii) gilt für die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, welche die Bedingungen

$$ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0$$

erfüllen, die Darstellung

$$f'(z_0) = \frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} \neq 0, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}.$$

Nach Satz 2.4.1 ist also f lokal umkehrbar mit holomorpher Umkehrfunktion.

In der Tat ist die Gleichung

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

mittels der Umformungen

$$cwz + dw = az + b, \quad (cw-a)z = b - dw$$

wieder durch eine Möbiustransformation

$$z = g(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ eindeutig lösbar.

<u>Beachte</u>: Schreiben wir $g(w) = \frac{\tilde{a} w + \tilde{b}}{\tilde{c} w + \tilde{d}}$ mit $\tilde{a} = -d$, $\tilde{b} = b$, $\tilde{c} = c$, $\tilde{d} = -a$, so gilt

$$\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = ad - bc \neq 0 .$$

Weiter gilt:

$$\frac{a}{c} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} , \quad -\frac{d}{c} = \lim_{|w| \to \infty} \frac{-dw+b}{cw-a}$$

sowie

$$|f(z)| = \left| \frac{az+b}{cz+d} \right| \to \infty \quad \left(z \to -\frac{d}{c} \right),$$

$$|g(w)| = \left| \frac{-dw+b}{cw-a} \right| \to \infty \quad \left(w \to \frac{a}{c} \right).$$

Ergänzen wir $\mathbb{C}$ durch den Punkt "∞" zur <u>Riemannschen Zahlenkugel</u> $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so sehen wir, daß die Möbiustransformationen eine Gruppe[1] von Abbildungen von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich bilden.

---

[1] Übung: Zeige, daß das Produkt $g \circ f$ zweier Möbiustransformationen wieder eine Möbius-transformation ist.

ii) Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \in \mathbb{C}$$

ist holomorph mit Ableitung

$$\exp'(z_0) = \exp(z_0) \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

Wegen

$$e^{2\pi i + z} = e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

genügt es,

$$\exp : \Omega = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |\operatorname{Im}(z)| < \pi \} \to \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$$

mit $\exp^{-1} = \log$ zu betrachten. Satz 24.1 liefert dann

$$\log'(e^z) = 1/e^z, \quad \forall z \in \Omega;$$

d.h.,

$$\log'(w) = \frac{1}{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]).$$

2.5 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$.

Def. 2.5.1. i) u heißt <u>harmonisch</u>, falls gilt

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

ii) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ heißt <u>Laplace-Operator</u>.

Sei nun $f = \binom{u}{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ holomorph und von der Klasse C^2. Mit den Cauchy-Riemann Gleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

aus Satz 2.2.1 erhalten wir

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

und analog $\Delta v = 0$.

Def. 2.5.2. Harmonische Funktionen $u, v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ heißen <u>konjugiert harmonisch</u>, falls $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Def. 9.4.2. Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion $f: \Omega \to \Omega'$ heißt bi-holomorph, falls f bijektiv ist mit holomorpher Umkehrfunktion $f^{-1}: \Omega' \to \Omega$.

Beisp. 9.4.2. i) Die Möbiustransformation f aus Beisp. 9.4.1. i) ist eine bi-holomorphe Abbildung

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}.$$

ii) $\exp: \Omega = \{z; |\operatorname{Im}(z)| < \pi\} \to \Omega' = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ ist bi-holomorph.

Man kann zeigen, daß zu jeder harmonischen Funktion $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ lokal eine konjugiert harmonische Funktion existiert.

Sei z.B. $\Omega = B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Für $z = x + iy \in \Omega$ setze [1]

$$v(z) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(tz)\, y - \frac{\partial u}{\partial y}(tz)\, x \right) dt .$$

Rechne

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \int_0^1 \Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(tz)}_{= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(tz)}\, ty - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(tz)\, tx - \frac{\partial u}{\partial y}(tz) \Big) dt ,$$

$$= -\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t \frac{\partial u}{\partial y}(tz) \right) dt = - \frac{\partial u}{\partial y}(z) ;$$

analog $\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z)$,

und $\quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 .$

Siehe Salamon, Übung 2.46.

---

[1] Dieser Ansatz ist motiviert durch die Identität

$$v(z) - v(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} v(tz)\, dt = \int_0^1 \left(v_x(tz)\, x + v_y(tz)\, y \right) dt , \quad z \in B,$$

für $v \in C^1(B)$ und die CR-Gleichungen (2.2.1).

3. Der Cauchysche Integralsatz

3.1 Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$ eine Kurve in Ω mit $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Def. 3.1.1. Die Länge von γ ist die Zahl

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt.$$

Weiter sei $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$.

Def. 3.1.2. Das Wegintegral von f längs γ ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt \in \mathbb{C}.$$

$\mathbb{C}$-Mult.

Bem. 3.1.1: (Parameterinvarianz des Wegintegrals) Wie im Fall des mittels dem Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ $(n=2)$ definierten (skalaren) Wegintegrals gilt für Umparametrisierungen mittels $\varphi \in C^1([a,b]; [0,1])$:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(\varphi(s)))\, \underbrace{\dot\gamma(\varphi(s))\, \frac{d\varphi}{ds}(s)}_{= \frac{d}{ds}(\gamma\circ\varphi)(s)}\, ds = \int_\gamma f(z)\, dz,$$

falls $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ (orientierungserhaltend);

bzw.

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz,$$

falls $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$ (orientierungsumkehrend).

Beisp. 3.1.1. i) Sei $f(z)=1$, $\gamma\in C^1([0,1];\mathbb{C})$. Dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \dot\gamma(t)\,dt = \gamma(1)-\gamma(0).$$

ii) Sei $f(z)=z$, $\gamma\in C^1([0,1];\mathbb{C})$. Dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \gamma(t)\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \frac{\gamma^2(1)}{2}-\frac{\gamma^2(0)}{2}.$$

Allgemein gilt:

Lemma 3.1.1. Für $f\in C^0(\Omega;\mathbb{C})$, $\gamma\in C^1([0,1];\Omega)$ gilt
$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \max_{0\le t\le 1}|f(\gamma(t))|\cdot L(\gamma).$$

Bew.: Wegen der Monotonie des Integrals gilt
$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt\right|\\ &\le \int_0^1 |f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)|\,dt\\ &= \int_0^1 |f(\gamma(t))|\,|\dot\gamma(t)|\,dt\\ &\le \max_{0\le t\le 1}|f(\gamma(t))|\cdot\underbrace{\int_0^1|\dot\gamma(t)|\,dt}_{=L(\gamma)}.\end{aligned}$$
$\square$

Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1]; \Omega)$ mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$ können wir zu einem Weg

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

zusammenhängen, welcher stückweise von der Klasse C^1 ist, $\gamma =: \gamma_1 + \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$.

Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ definieren wir in diesem Fall

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

und können auf diese Weise das Wegintegral von f längs beliebiger Kurven $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ erklären.

<u>Def</u>. 3.1.3. Der Weg $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $\gamma(1) = \gamma(0)$.

Zusammenhang und Wegzusammenhang.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\Omega \neq \emptyset$.

Def. 3.1.4. i) Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subset \Omega$ heißt Zusammenhangskomponente von Ω, falls U sowohl offen als auch (relativ) abgeschlossen ist.

ii) Ω heißt zusammenhängend (zshg.), falls Ω genau eine zshg.-Komponente hat.

Bem. 3.1.2: Für $\emptyset \neq \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$ gilt:

$$\Omega \text{ zshg} \iff \forall\, \emptyset \neq U, V \overset{\text{offen}}{\subset} \Omega : \Omega = U \cup V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset.$$

Def. 3.1.5. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Ω ist C^k-wegzshg. falls gilt:

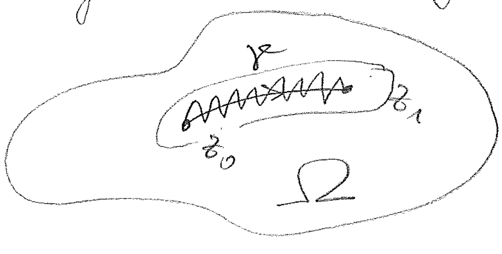
$$\forall\, z_0, z_1 \in \Omega \;\exists\, \gamma \in C^k([0,1]; \Omega) : \gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1.$$

Lemma 3.1.2. Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen gilt:

$$\Omega \text{ zshg.} \iff \forall k \in \mathbb{N}_0 : \Omega \text{ ist } C^k\text{-wegzshg.}$$

Bem: Da Ω offen, genügt es, die Aussage für $k = 0$ zu zeigen.

Uns interessiert nur "$\Rightarrow$".



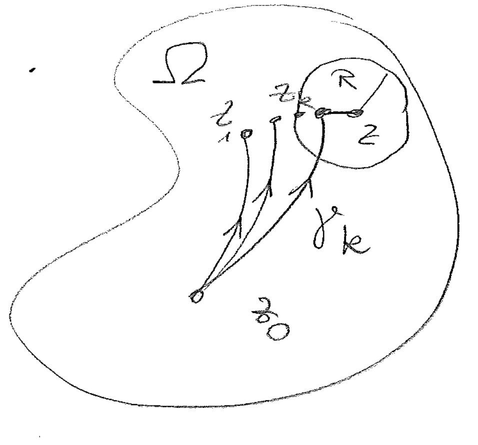
Bew.: "$\Rightarrow$" Fixiere $z_0 \in \Omega$ und definiere

$$\mathcal{U} = \{ z_1 \in \Omega ; \exists \gamma \in C^0([0,1]; \Omega) : \gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1 \}.$$

Dann gilt $z_0 \in \mathcal{U}$, also $\mathcal{U} \neq \phi$. Da Ω offen, gibt es zu jedem $z_1 \in \mathcal{U}$ einen Ball $B_R(z_1) \subset \Omega$, und man kann einen Weg γ_{z_1} von z_0 nach z_1 durch Anhängen des Weges $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $0 \leq t \leq 1$, für jedes $z_2 \in B_R(z_1)$ zu einem Weg $\gamma_{z_2} = \gamma_{z_1} + \gamma$ von z_0 nach z_2 fortsetzen; es gilt also $B_R(z_1) \subset \mathcal{U}$, und $\mathcal{U}$ ist offen.

Schließlich gilt für $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ mit $z_k \to z \in \Omega$ $(k \to \infty)$ für $R > 0$ mit $B_R(z) \subset \Omega$ auch $z_k \in B_R(z)$ für genügend große $k \geq k_0$. Einen Weg γ_{z_k} von z_0 nach z_k kann man dann wie oben durch Anhängen von $\gamma(t) = z_k + t(z - z_k)$, $0 \leq t \leq 1$, zu einem Weg $\gamma_z = \gamma_{z_k} + \gamma$ von z_0 nach z ergänzen; $\mathcal{U}$ ist also auch (relativ) abgeschlossen in Ω.

Da Ω zshg, folgt $\mathcal{U} = \Omega$.



Analog zur Charakterisierung konservativer Kraftfelder $f = \nabla F$ mittels dem skalaren Wegintegral im $\mathbb{R}^n$ gilt folgender Satz.

<u>Satz</u> 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ sind äquivalent:

i) $\exists\, F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$: F holomorph, $F' = f$;

ii) $\int_\gamma f(z)\,dz$ ist für jedes $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ nur abhängig von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$;

iii) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$.

<u>Bew.</u>: Wir zeigen i) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i).

i) $\Rightarrow$ iii) Sei $f = F'$ mit holomorphem $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$, und sei $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$. Dann gilt nach der Kettenregel mit $F'(z) = dF(z) : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)$$
$$= dF(\gamma(t))\,\dot\gamma(t) = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t),$$

also $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)\,dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$,

falls γ geschlossen. Analog für $\gamma \in C^1_{pw}$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.

Sei $-\gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ die Kurve mit

$$-\gamma_2(t) = \gamma_2(1-t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Dann ist $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ geschlossen, also

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

nach Annahme ii) und Bem. 3.1.1.

ii) $\Rightarrow$ i) OBdA sei Ω zusammenhängend (zshg.) (Sonst betrachte jede zshg.-Komponente.) Da Ω offen, ist Ω auch C^1-wegzshg.

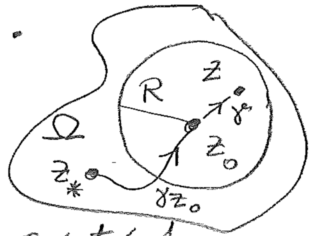
Fixiere $z_* \in \Omega$, und für $z \in \Omega$ setze

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei $\gamma_z \in C^1([0,1]; \Omega)$ ein beliebiger Weg von $\gamma_z(0) = z_*$ nach $\gamma_z(1) = z$ ist.

Nach Annahme ii) ist F wohldefiniert.

Sei nun $z_0 \in \Omega$. Da Ω offen, gibt es $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset \Omega$. Sei $\gamma_{z_0} \in C^1([0,1], \Omega)$ ein Weg mit $\gamma_{z_0}(0) = z_*$, $\gamma_{z_0}(1) = z_0$.



Für $z = z_0 + h \in B_R(z_0)$ ist dann

$$\gamma_z = \gamma_{z_0} + \gamma \ , \quad \gamma(t) = z_0 + th \ , \quad 0 \le t \le 1 \ ,$$

ein Weg der Klasse C^1_{pw} von z_* nach z, und

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$= F(z_0) + \int_0^1 f(z_0 + th)\cdot h\,dt \ .$$

Es folgt

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \int_0^1 f(z_0 + th)\,dt$$

$$\longrightarrow f(z_0) \quad (h \to 0,\ h \ne 0) \ .$$

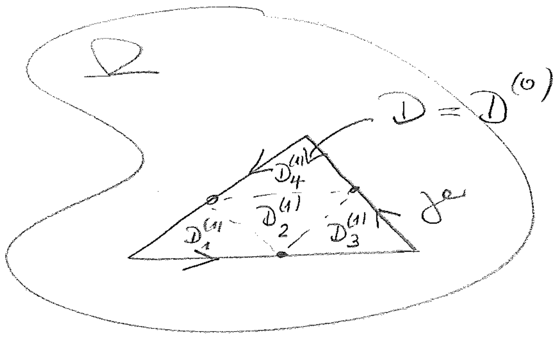
Nach Satz 2.2.3 ist F am Punkt z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Da f stetig, ist $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph.

$\square$

Unser nächstes Ziel ist es zu beweisen, daß jede analytische Funktion $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ lokal eine Stammfunktion besitzt. Mit Satz 3.1.1 folgt dann, daß das Wegintegral von f längs genügend kleiner geschlossener Kurven verschwindet. Letzteres läßt sich für Ränder von Dreiecken oder Rechtecken jedoch auch allein unter Benutzung der komplexen Differenzierbarkeit von f zeigen; und dies genügt, um lokal ein holomorphes F zu konstruieren mit $F' = f$, wie wir in den nächsten beiden Abschnitten sehen werden.

3.2 Der Satz von Goursat

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $D = \overline{D} \subset \Omega$ ein abg. Dreieck mit Rand ∂D. Wir können ∂D durch eine geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ parametrisieren, wobei wir γ so orientieren, daß D beim Durchlaufen von γ stets links liegt.



Satz 3.2.1 (Goursat) Sei $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ wie oben. Falls $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch, so gilt

$$\int_{\partial D} f \, dz = \int_{\gamma} f \, dz = 0 .$$

Bew.: Nimm widerspruchsweise an, daß für ein analytisches $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ gilt:

$$I^{(0)} := \int_{\partial D} f \, dz \neq 0 .$$

Unterteile $D^{(j)}$ wie im Schritt $j=1$ in 4 zu $D^{(j)}$ ähnliche Dreiecke $D_k^{(j+1)} = \overline{D_k^{(j+1)}}$ mit orientiertem Rand $\partial D_k^{(j+1)}$, wobei

$$L\left(\partial D_k^{(j+1)}\right) = \frac{1}{2} L\left(\partial D^{(j)}\right) = \frac{L(\partial D^{(0)})}{2^{j+1}}, \ 1 \leq k \leq 4.$$

Da wiederum gilt

$$I^{(j)} := \int_{\partial D^{(j)}} f \, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k^{(j+1)}} f \, dz,$$

existiert $k_{j+1} \in \{1, \dots, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\partial D_{k_{j+1}}^{(j+1)}} f \, dz \right| \geq \frac{|I^{(j)}|}{4} \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^{j+1}}.$$

Setze $\quad D^{(j+1)} := D_{k_{j+1}}^{(j+1)} \subset D^{(j)}$.

Da $D^{(j)}$ kompakt, $j \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D^{(j+1)} \subset D^{(j)} \subset \dots \subset D$, existiert $z_* \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} D^{(j)}$.

Definiere Dreiecke $D =: D^{(0)} \supset D^{(1)} \supset \ldots$ iterativ, wie folgt:

$j=1$: Die Ecken von $D = D^{(0)}$ und die Mittelpunkte der Seiten von D sind Eckpunkte von 4 Dreiecken $D_1^{(1)}, \ldots, D_4^{(1)}$ mit orientiertem Rand $\partial D_k^{(1)}$, wobei

$$L(\partial D_k^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\partial D^{(0)}), \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Da die Wegintegrale längs $\partial D_j^{(1)}$ und $\partial D_k^{(1)}$ längs gemeinsamer Kanten gegenläufig orientiert sind und einander aufheben, gilt

$$I^{(0)} = \int_{\partial D} f \, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k^{(1)}} f \, dz,$$

und es gibt $k_1 \in \{1, \ldots, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\partial D_{k_1}^{(1)}} f \, dz \right| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4}.$$

Setze $D^{(1)} := D_{k_1}^{(1)}$.

$j \mapsto j+1$: Sei $D^{(j)} \subset D^{(0)}$ bereits definiert mit $L(\partial D^{(j)}) = \frac{1}{2^j} L(\partial D^{(0)})$, $\left| \int_{\partial D^{(j)}} f \, dz \right| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^j}$.

Für $z \in \Omega$ nahe z_* gilt nach Annahme

$$f(z) = f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*) + o(z - z_*),$$

wobei
$$\frac{o(z-z_*)}{|z-z_*|} \to 0 \quad (z \to z_*).$$

Mit Beispiel 3.1.1, bzw. Satz 3.1.1 folgt

$$I^{(j)} = \int_{\partial D^{(j)}} f\,dz = \underbrace{\int_{\partial D^{(j)}} f(z_*)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial D^{(j)}} f'(z_*)(z-z_*)\,dz}_{=0} + R^{(j)},$$

wobei Lemma 3.1.1 die Abschätzung liefert

$$|R^{(j)}| \leq \max_{z \in \partial D^{(j)}} |f(z) - f(z_*) - f'(z_*)(z-z_*)|\, L(\partial D^{(j)})$$

$$\leq o\left(L(\partial D^{(j)})\right) L(\partial D^{(j)}) = o(1)\left(L(\partial D^{(j)})\right)^2 = \frac{o(1)}{4^j}$$

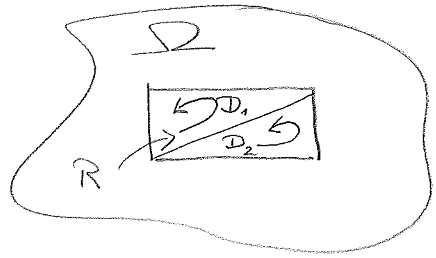
mit $o(1) \to 0$ $(j \to \infty)$. Andererseits gilt nach Konstruktion und Annahme

$$|R^{(j)}| = |I^{(j)}| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^j}, \quad I^{(0)} \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

Kor. 3.2.1: Sei $Q = \overline{Q} \subset \Omega$ ein Rechteck mit orientiertem Rand ∂Q, $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch. Dann gilt [1)]

$$\int_{\partial Q} f(z)\,dz = 0.$$



Bew.: Zerlege $Q = D_1 \cup D_2$ mit Dreiecken $D_i \subset \Omega$ mit orientiertem Rand ∂D_i, $i = 1,2$.

Dann gilt

$$\int_{\partial Q} f\,dz = \int_{\partial D_1} f\,dz + \int_{\partial D_2} f\,dz,$$

und die Behauptung folgt mit Satz 3.2.1. □

Beisp. 3.2.1: Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi}\,dx .$$

Beachte: Quadratische Ergänzung liefert

$$e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} = e^{-\pi (x^2 + 2 i x \cdot \xi - \xi^2 + \xi^2)}$$

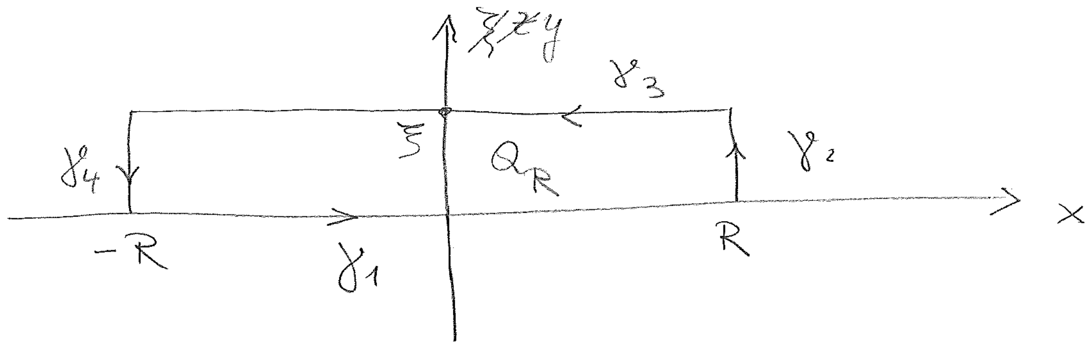
$$= e^{-\pi (x + i\xi)^2} \cdot e^{-\pi \xi^2} .$$

1) Falls $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph, so folgt die Aussage auch direkt aus den Cauchy-Riemann Glgen. (2.2.1); siehe Übung 3.5.

Weiter gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1 .$$

Beh.: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,dx = 1, \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$

Bew.: Für $\xi, R > 0$ betrachte das Rechteck
$$Q_R = \{ z = x+iy \in \mathbb{C};\ |x| \leq R,\ 0 \leq y \leq \xi \},$$
mit orientiertem Rand
$$\partial Q_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 ,$$
wobei
$$\gamma_1(t) = 2R \cdot t - R, \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$\gamma_2(t) = R + it\xi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$\gamma_3(t) = R - 2Rt + i\xi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$\gamma_4(t) = -R + i(1-t)\xi, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Da die Funktion

$$f(z) = e^{-\pi z^2}$$

analytisch ist, gilt nach Kor. 3.2.1

$$0 = \int_{\partial Q_R} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \dots + \int_{\gamma_4} f\,dz\,;$$

also

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = -\int_{\gamma_3} f\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz + \int_{\gamma_4} f\,dz$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}dx + I_2 + I_4\,.$$

Mit

$$|I_{2,4}| \leq \max_{0\leq t\leq 1} \left| e^{-\pi(R\pm it\xi)^2} \right| \cdot \xi$$

$$= \xi \cdot \max_{0\leq t\leq 1} e^{-\pi(R^2 - t^2\xi^2)} \to 0 \ (R\to\infty).$$

folgt
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}dx = 1\,.$$

Analog für $\xi < 0$. $\square$

Es folgt:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}: \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx}_{\substack{= \text{Fourier-Transformierte } \hat{f}(\xi) \\ \text{der Funktion } f(x) = e^{-\pi x^2}.}} = e^{-\pi \xi^2}.$$

"Die Funktion $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ist ihre eigene Fourier-Transformierte."

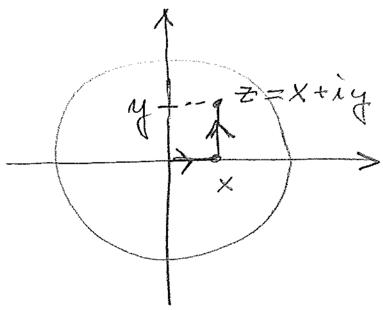
3.3 Der Cauchysche Integralsatz auf einem Ball

Betrachte $\Omega = B_R(z_*) \subset \mathbb{C}$. Der Satz von Goursat liefert das folgende Resultat.

Satz 3.3.1. Sei $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch, wobei $\Omega = B_R(z_*)$ eine Kreisscheibe. Dann existiert $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $F' = f$.

Bew.: OBdA sei $z_* = 0$. Zu $z = x + iy \in \Omega = B_R(0)$ setze

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} 2tx, & 0 \le t \le 1/2, \\ x + i(2t-1)y, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$



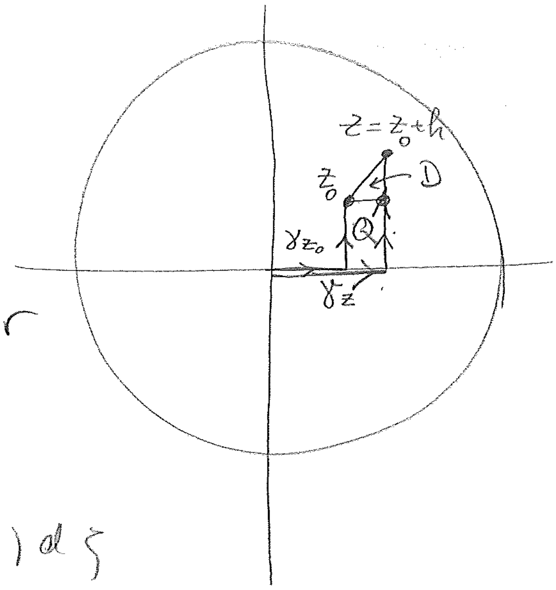
und definiere

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta .$$

Beh.: F ist an jeder Stelle $z_0 \in \Omega = B_R(0)$ $\mathbb{C}$-diffbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$.

Bew.: Sei $z_0 \in \Omega$. Für $z \in \Omega$ schreibe $z = z_0 + h$.

Mit dem Rechteck Q und Dreieck D wie in nebenstehender Figur gilt



$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$+ \underbrace{\int_{\partial Q} f(\zeta)\,d\zeta}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial D} f(\zeta)\,d\zeta}_{=0} + \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta\,,$$

wobei $\gamma(t) = z_0 + th, \quad 0 \le t \le 1.$

Mit Satz 3.2.1 und Kor. 3.2.1 folgt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(z_0+th)\,dt \cdot h\,.$$

Nach Division durch h folgt Existenz von

$$F'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z_0+th)\,dt$$

$$= f(z_0)\,. \qquad \square$$

Der Satz folgt.

Bem. 3.3.1: Der oben angegebene Beweis ist dem Buch von Shakarchi-Stein, S. 37 f., entnommen. Studierende schlugen nach der Vorlesung die folgende, einfachere Konstruktion vor:

Zu gegebenem analytischem $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$, wo $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{C}$, und zu beliebigem $z \in \Omega$ setze

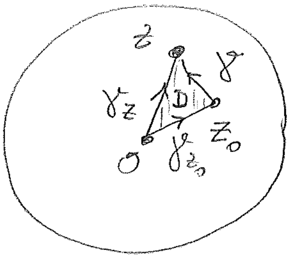
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f\,d\zeta, \quad \text{wo } \gamma_z(t) = tz,\ 0 \le t \le 1.$$

Zu festem $z_0 \in \Omega$ und beliebigem $z = z_0 + h$ bilden dann die Wege γ_{z_0}, γ_z und

$$\gamma(t) = z_0 + th,\ 0 \le t \le 1,$$

die Seiten eines Dreiecks $D = \overline{D} \subset \Omega$ mit

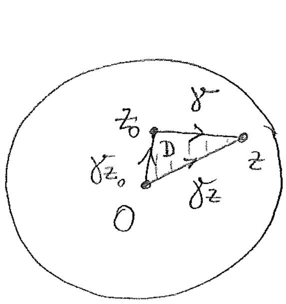
$$\pm \partial D = \gamma_z - \gamma - \gamma_{z_0},$$



und Satz 3.2.1 liefert

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f\,d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f\,d\zeta$$

$$= \underbrace{\int_{\partial D} f\,d\zeta}_{=0} + \int_{\gamma} f\,d\zeta = \int_{\gamma} f\,d\zeta$$



wie zuvor.

Als Korollar erhalten wir den Satz von Cauchy für eine Kreisscheibe.

<u>Satz</u> 3.3.2 (Cauchy). Sei $\Omega = B_R(z_*) \subset \mathbb{C}$, $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ analytisch, $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ geschlossen. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

<u>Bew.</u>: Gemäß Satz 3.3.1 existiert eine holomorphe Funktion $F \in C^1(\Omega;\mathbb{C})$ mit $F' = f$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 3.1.1. □

<u>Beisp.</u> 3.3.1. Wir zeigen die Formel

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Betrachte dazu die auf $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}, \quad z = x+iy,$$

Für $R, \varepsilon > 0$ betrachte den halben Kreisring

$$A_{R,\varepsilon} = \{ z = x+iy ; \ \varepsilon < |z| < R, \ y > 0 \}$$

mit orientiertem Rand

$$\partial A_{R,\varepsilon} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 ,$$

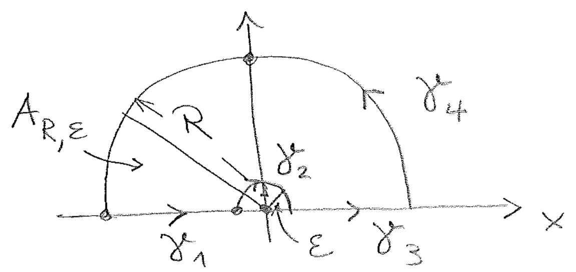
wobei

$$\gamma_1(t) = t - R, \quad 0 \leq t \leq R - \varepsilon,$$

$$\gamma_2(t) = \varepsilon e^{i(\pi - t)}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

$$\gamma_3(t) = t, \quad \varepsilon \leq t \leq R,$$

$$\gamma_4(t) = R e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$



Durch Hinzunahme von $\pm \gamma_5$ mit

$$\gamma_5(t) = it, \quad \varepsilon \leq t \leq R,$$

können wir $A_{R,\varepsilon} = A^-_{R,\varepsilon} \cup A^+_{R,\varepsilon}$ zerlegen in

$$A^{\pm}_{R,\varepsilon} = \{ z = x+iy \in A_{R,\varepsilon} ; \pm x \geq 0 \} .$$

Da $A^+_{R,\varepsilon}$, bzw. $A^-_{R,\varepsilon}$ jeweils in einem Kreis $B^\pm \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ enthalten sind, folgt mit Satz 3.3.2

$$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{\partial A^+_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{\partial A^-_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0.$$

Mit der Abschätzung

$$|f(z)| = \frac{|1 - e^{ix}\cdot e^{-y}|}{R^2} \leq \frac{2}{R^2}, \quad z = x+iy = Re^{it}$$

für $0 \leq t \leq \pi$ und Lemma 3.1.1 folgt

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2}{R^2} \underbrace{L(\gamma_4)}_{=\pi R} = \frac{2\pi}{R} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

Mit $$e^{iz} - (1+iz) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = -z^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(iz)^{k-2}}{k!}}_{=:E(z)},$$

wobei

$$|E(z)| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iz)^{k-2}}{k!}\right| \leq C \text{ für } |z| \leq 1,$$

erhalten wir zudem

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2}\left(\frac{-iz}{z^2} + E(z)\right)dz = \int_0^{\pi} \frac{+i}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}}\, i\varepsilon e^{i(\pi-t)}\,dt + O(\varepsilon)$$
$$= -\pi + O(\varepsilon) \to -\pi \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Mit Symmetrie $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\downarrow 0}} \left(\int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_3} f\,dz \right)$$

$$= - \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\downarrow 0}} \left(\int_{\gamma_2} f\,dz + \int_{\gamma_4} f\,dz \right) = \pi .$$

Das im Beispiel benutzte Zerlegungsprinzip gestattet es, Satz 3.3.2 wie folgt zu verallgemeinern.

<u>Kor</u>. 3.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, und sei $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ beschränkt mit $\partial \mathcal{U} \in C^1_{pw}$. Dann gilt

$$\int_{\partial \mathcal{U}} f(z)\, dz = 0.$$

<u>Bew.</u>: Zerlege $\mathcal{U} = \dot{\bigcup}_{k=1}^{K} \mathcal{U}_k$ mit Hilfe eines genügend feinen achsenparallelen Gitters in Teilgebiete $\mathcal{U}_k$ mit $\mathcal{U}_k \subset \overline{\mathcal{U}}_k \subset B_{R_k}(z_k) \subset \overline{B_{R_k}(z_k)} \subset \Omega$, und mit Rand $\partial \mathcal{U}_k \in C^1_{pw}$, $1 \le k \le K$.

Da innere Kanten zweimal mit umgekehrter Orientierung durchlaufen werden, heben sich die entsprechenden Beiträge auf und mit Satz 3.3.2 folgt

$$\int_{\partial \mathcal{U}} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial \mathcal{U}_k} f(z)\, dz = 0.$$

$\square$

3.4 Cauchysche Integralformel

Aus Satz 3.3.2 erhalten wir eine Darstellung für f.

Satz 3.4.1. Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ eine Kreisscheibe. Dann gilt

$$\forall z \in B : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Bew.: OBdA sei $B = B_R(0)$. Zu gegebenem $z \in B$ und $0 < \varepsilon < R - |z|$ betrachte

$$A_{R,\varepsilon} = B_R(0) \setminus B_\varepsilon(z).$$

Beh.: $$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Bew.: Zerlege $A_{R,\varepsilon}$ mittels eines genügend feinen Gitters in Teilgebiete $A^k_{R,\varepsilon}$, $1 \le k \le K$, die jeweils in einem Ball $B_k \subset \Omega \setminus \{z\}$ enthalten sind. Da sich die Wegintegrale entlang gemeinsamer Kanten von $A^k_{R,\varepsilon}$ und $A^j_{R,\varepsilon}$ für $j \neq k$ aufheben, folgt

$$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial A^k_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

gemäß Satz 3.3.2. $\square$

Mit Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ erhalten wir bei Wahl der Parametrisierung

$$\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

von $\partial B_\varepsilon(z)$ nun

$$\int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_\varepsilon(t))}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt \to 2\pi i f(z),$$

wie gewünscht. $\square$

Es folgt, daß analytische Funktionen stets auch glatt sind. Die anfangs gemachte Unterscheidung zwischen "analytischen" und "holomorphen" Funktionen ist also unnötig.

<u>Kor.</u> 3.4.1 Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f glatt; insbesondere ist f holomorph. Genauer gilt:

i) f ist im Innern jeder Balles $B = B_R(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ beliebig oft $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$\forall z \in B, n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta .$$

ii) f läßt sich lokal um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ durch seine Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

darstellen.

Bew.: i) (Induktion nach n). Für $n=0$ folgt die Behauptung mit Satz 3.4.1.

Nimm an, f ist n-mal $\mathbb{C}$-diffbar in B und

$$\forall z \in B: f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta .$$

Fixiere $z_1 \in B$. Für $z \neq z_1 \in B$ nahe z_1 gilt

$$\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_1)}{z - z_1} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\zeta) \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z_1)^{n+1}}}{z - z_1} \right)}_{\substack{(*) \\ \longrightarrow \\ (z \to z_1)} \frac{n+1}{(\zeta - z_1)^{n+2}}} d\zeta$$

Beachte, daß die Konvergenz (*) gleichmäßig bzgl. $\zeta \in \partial B$ gilt. Daher kann man den Grenzübergang $z \to z_1$ mit der Integration über ∂B vertauschen, und es existiert

$$f^{(n+1)}(z_1) = \lim_{\substack{z \to z_1 \\ z \neq z_1}} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_1)}{z - z_1} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}} .$$

ii) Fixiere $z_0 \in \Omega$. Für $R > 0$ mit $B = B_R(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ und $z \in B$ gilt nach Satz 3.4.1 die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Für $z \in B$ nahe z_0 schreibe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

und entwickle

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n .$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ und $z \in B_r(z_0)$ bei festem $0 < r < R$.

Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$

wobei wir i) benutzen. $\square$

<u>Bem.</u> 3.4.1. i) Mit Kor. 3.4.1. i) erhalten wir insbesondere die <u>Cauchy-Ungleichungen</u>

$$\forall n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \max_{\partial B_R(z_0)} |f|}{R^n}$$

für jedes $z_0 \in \Omega$ und jedes $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$

ii) Mit den Cauchy-Ungleichungen in i) konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n =: p(z; z_0)$$

gemäß Kor. 3.4.1. ii) absolut und <u>gleichmäßig</u> auf jedem Ball $B_R(z_0)$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$.

<u>Bew.:</u> Zu $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ gibt es $R_1 > R$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset B_{R_1}(z_0) \subset \overline{B_{R_1}(z_0)} \subset \Omega$, da Ω nach Annahme offen.

Für $z \in \overline{B_R(z_0)}$ können wir dann mit i) den Reihenrest von p abschätzen:

$$\sum_{n=j}^{k} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right| \leq \max_{\partial B_{R_1}(z_0)} |f| \sum_{n=j}^{k} \left(\frac{R}{R_1} \right)^n \xrightarrow[(j, k \to \infty)]{} 0,$$

gleichmäßig in z.

Kor. 3.4.2 (Identitätssatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg. und seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Weiter gelte für ein $z_* \in \Omega$

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_*) = g^{(n)}(z_*) .$$

Dann ist die Funktion $f-g$ konstant.

Bew.: OBdA sei $g \equiv 0$. (Sonst betrachte $\tilde{f} := f-g$.)

Sei

$$\mathcal{U} = \{ z \in \Omega ;\ f(z) = f(z_*),\ \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z) = 0 \}.$$

Dann gilt $\mathcal{U} \neq \emptyset$, da $z_* \in \mathcal{U}$. Weiter gilt gemäß Kor. 3.4.1. ii) für jedes $z_0 \in \mathcal{U}$ und genügend kleines $r > 0$ so daß $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ auch

$$f(z) = f(z_0) \text{ für } z \in B_r(z_0),$$

also auch

$$f^{(n)}(z) = 0 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N},\ z \in B_r(z_0),$$

und $\mathcal{U}$ ist offen.

Schließlich folgt mit der Stetigkeit von f und $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, auch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ in Ω, da Ω zshg., also $\mathcal{U} = \Omega$. $\square$

Kor. 3.4.2 liefert nun auch die folgende Aussage.

Kor. 3.4.3 (Nullstellen sind isoliert)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zslg, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Sei weiter $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) = 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}: f(z) \neq 0.$$

Bew.: Da nach Annahme die Menge Ω ~~zslg.~~ und die Funktion f nicht konstant, gibt es gemäß Kor. 3.4.2 eine kleinste Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$, und gemäß Kor. 3.4.1, ii) gilt

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^{n_0} g(z)$$

mit
$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-n_0}$$

$$= \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + O(z - z_0) \xrightarrow{(z \to z_0)} g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0;$$

also
$$|f(z)| \geq |z - z_0|^n \frac{|g(z_0)|}{2} \text{ für } 0 < |z - z_0| < \varepsilon \ll 1.$$

$\square$

<u>Kor.</u> 3.4.4 (Liouville). Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls $C \geq 0$ existiert mit $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

<u>Bew.:</u> Gemäß Kor. 3.4.1.i) oder Bem. 3.4.1.i) gilt für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$, jedes $R > 0$ die Abschätzung

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \leq \frac{C}{R}.$$

Mit $R \to \infty$ folgt $f'(z_0) = 0$, also $f' \equiv 0$, und f ist konstant. $\square$

Kor. 3.4.5 (Fundamentalsatz der Algebra)
Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ein nicht konstantes Polynom. Dann hat p (mindestens) eine Nullstelle.

Bew.: (indirekt) Nimm an, es existiert $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \not\equiv p(0)$ ohne Nullstelle.

Da p nicht konstant, gilt

$$k_1 := \max\{k;\ a_k \neq 0\} \geq 1.$$

OBdA sei $k_1 = n$, $a_n = 1$. (Sonst betrachte $\frac{p(z)}{a_n}$.)

Für $|z| \geq R \geq 1$ schätze ab

$$|p(z)| = |z|^n \left|\left(1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}\right)\right|$$

$$\geq R^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}| R^{-k}\right) \geq 1,$$

falls $R = 2 \cdot \max\{1, \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}|\}$.

Da $\overline{B_R(0)}$ kompakt, $p(z) \neq 0$ gilt

$$\delta := \min_{|z| \leq R} |p(z)| > 0.$$

Es folgt: Die holomorphe Funktion $f = \frac{1}{p}$ ist beschränkt $|f(z)| \leq \max\{1, 1/\delta\}$. Kor 3.4.4 ergibt die Beh.

$\square$

Kor. 3.4.6 (Weierstrass) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\Omega;\mathbb{C})$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_k \xrightarrow{(k\to\infty)} f$ in $C^0_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$; d.h., für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gelte

$$\sup_{z\in K} |f_k(z) - f(z)| \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Dann ist f holomorph und $f_k^{(n)} \xrightarrow{(k\to\infty)} f^{(n)}$ in $C^0_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Bew.: Es genügt, die Aussage auf jedem Ball mit $K = \overline{K} \subset B_R(z_0) \subset \overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und für $n=1$ zu zeigen. Mit Kor. 3.4.1. i) erhalten wir

$$\sup_{z\in K} |f_k'(z) - f_j'(z)| = \sup_{z\in K} \frac{1}{2\pi}\left| \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f_k(\zeta)-f_j(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right|$$

$$\leq \sup_{z\in \overline{B}_R(z_0)} |f_k(z) - f_j(z)| \cdot \sup_{z\in K,\ \zeta\in\partial B_R(z_0)} \frac{R}{|\zeta - z|^2} \xrightarrow[(j,k\to\infty)]{} 0 .$$

Also gilt $f_k' \xrightarrow{(k\to\infty)} g$ in $C^0(K;\mathbb{C})$, und mit

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{k\to\infty} \frac{f_k(z+h)-f_k(z)}{h} = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k'(z+th)\,dt = \int_0^1 g(z+th)\,dt$$

für $z \in B$, $0 < |h| < dist(z, \partial B)$ erhalten wir nach Grenzübergang $h\to 0$ die Gleichheit

$$f'(z) = g(z),$$

wie gewünscht. $\square$

Kor. 3.4.7 (Maximumsprinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zshg, $f \in C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{C})$ analytisch in Ω. Dann gilt

$$M := \max_{z \in \bar{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|,$$

und falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $|f(z_0)| = M$, so gilt $f \equiv f(z_0)$.

Bew.: Nimm an, es gibt $z_0 \in \Omega$ mit

$$|f(z_0)| = M > 0.$$

(Andernfalls ist die Behauptung richtig.)

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(z_0) = 0$.

Bew.: (indirekt) Nimm an, $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und n_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Nach Kor. 3.4.1. ii) gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{n_0} g(z), \quad z \in B_R(z_0),$$

mit

$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n - n_0}, \quad z \in B_R(z_0),$$

wobei $0 < R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Mit
$$g(z) \xrightarrow{(z\to z_0)} g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0,$$
folgt für $z = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,
$$\frac{(z-z_0)^{n_0} g(z)}{|z-z_0|^{n_0}} \cdot \overline{f(z_0)} = e^{in_0 t} g(z)\, \overline{f(z_0)}$$
$$\xrightarrow[(r\downarrow 0)]{} e^{in_0 t} g(z_0)\, \overline{f(z_0)}.$$

Wähle $t \in [0, 2\pi]$ mit
$$c_0 := e^{in_0 t} g(z_0) \overline{f(z_0)} > 0.$$

Es folgt für genügend kleine $r > 0$, $z = z_0 + re^{int}$
$$\operatorname{Re}\left(f(z)\overline{f(z_0)}\right) = |f(z_0)|^2 + r^n \operatorname{Re}\underbrace{\left(e^{in_0 t} g(z) \overline{f(z_0)}\right)}_{\to c_0\ (r\downarrow 0)}$$
$$> |f(z_0)|^2,$$

also wegen
$$\operatorname{Re}\left(f(z)\overline{f(z_0)}\right) \le |f(z)|\,|f(z_0)|$$
insbesondere
$$|f(z)| > |f(z_0)|$$
im Widerspruch zu unserer Annahme. $\square$

Da Ω zshg. folgt mit

$$f^{(n)}(z_0) = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

und Kor. 3.4.2 nun $f \equiv f(z_0)$,

wie gewünscht.

$\Box$

<u>Bem.</u> 3.4.2. Die Annahme der Beschränktheit von ist wichtig für die Aussage von Kor. 3.4.7.

Betrachte zum Beispiel die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = e^{-iz^2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

auf $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x, y > 0\}$.

Es gilt
$$|f(z)| = 1 \text{ auf } \partial\Omega;$$

jedoch erhalten wir für $z = r(1+i)$ mit $z^2 = 2ir^2$ die Werte

$$f(z) = e^{2r^2} \longrightarrow \infty \ (r \to \infty).$$

Hebbare Singularitäten.

Unter gewissen Annahmen kann man analytische Funktionen in isolierten Ausnahmestellen ihres Definitionsbereichs zu holomorphen Funktionen ergänzen.

Satz 3.4.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in C^1(\Omega \setminus \{a\}; \mathbb{C})$ holomorph mit

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Dann gibt es $\tilde{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus \{a\}$.

Bew.: Sei $R > 0$ mit $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$, $z \in B_R(a) \setminus \{a\}$.

Beh.: Es gilt

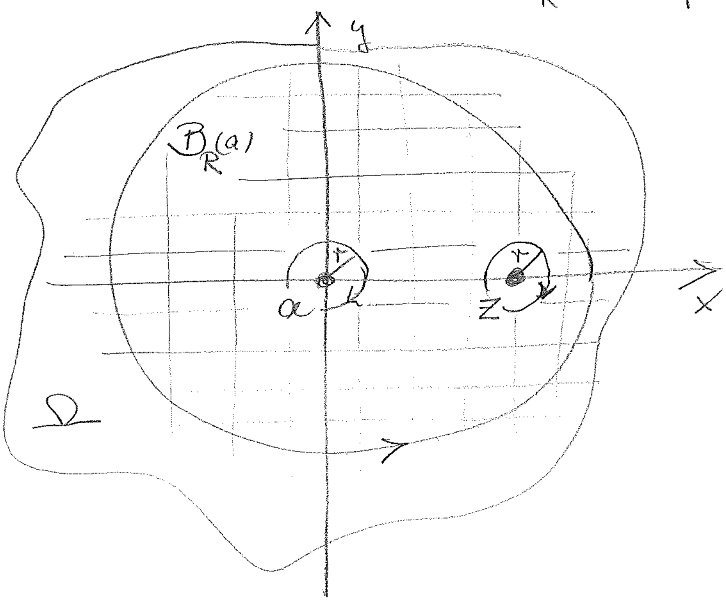
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Bew.: Für $0 < r < \frac{1}{2} \min\{|z-a|, R-|z-a|\}$

zerlege

$$U := B_R(a) \setminus \left(\overline{B_r(a)} \cup \overline{B_r(z)}\right) = \bigcup_{k=1}^{K} U_k$$

in endlich viele $\mathcal{U}_k \subset B_{R_k}(z_k) \subset \overline{B_{R_k}(z_k)} \subset \Omega$,
mit Rand $\partial \mathcal{U}_k \in C^1_{pw}$ wie in der Skizze



durch ein zur Achse durch a und z paralleles Gitter genügend feiner Maschenweite.

Mit Satz 3.3.2 erhalten wir

$$\int_{\partial\left(B_R(a) \setminus \left(B_r(a) \cup B_r(z)\right)\right)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial \mathcal{U}_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

wobei $\displaystyle\int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it} dt \xrightarrow[(r \downarrow 0)]{} 2\pi i f(z)$

und $\displaystyle\left| \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \max_{|\zeta - a| = r} \frac{2\pi r |f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \overset{*)}{\leq} \frac{4\pi}{|z-a|} \max_{|\zeta-a|=r} |(\zeta - a) f(\zeta)| \to 0 \quad (r \downarrow 0).$

---

*) $|\zeta - z| \geq \underbrace{|z - a|}_{\geq 2r} - \underbrace{|\zeta - a|}_{= r} \geq \frac{|z-a|}{2}$ für $\zeta \in \partial B_r(a)$. $\square$

Die Funktion $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \,, \quad z \in B_R(a),$$

und $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus B_R(a)$ erfüllt also $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus \{a\}$, und $\tilde{f}$ ist holomorph auf Ω. $\square$

Als eine erste Anwendung dieses Satzes beweisen wir die folgende Aussage.

<u>Satz</u> 3.4.3 (Das Schwarzsche Lemma)

Sei $B = B_1(0)$, $f: B \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in B$. Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1, \quad \forall z \in B: |f(z)| \leq |z|,$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B$, so ist $f(z) = cz$ linear, wobei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Bew.: Die Funktion $g: \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in \mathbb{B} \setminus \{0\}, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

ist stetig und auf $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ analytisch.
Gemäß Satz 3.4.2 ist g holomorph auf ganz $\mathbb{B}$.

Weiter gilt nach Voraussetzung

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{|z|}, \quad z \in \mathbb{B} \setminus \{0\};$$

also mit dem Maximumprinzip (Kor. 3.4.7) für jedes $0 < r < 1$

$$\sup_{z \in B_r(0)} |g(z)| \leq \sup_{z \in \partial B_r(0)} |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Nach Grenzübergang $r \uparrow 1$ ergibt dies die Ungleichung $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{B}$, also

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{B}.$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{B}$, so gilt $|g(0)| = 1$, bzw. $|g(z)| = 1$ für ein $z \in \mathbb{B}$, und $g \equiv c \in \mathbb{C}$ nach Kor. 3.4.7. $\square$

Kor. 3.4.8. Sei $f : B = B_1(0) \subset \mathbb{C} \to B$ analytisch. Dann gelten für alle $z, z_0 \in B$ die Ungleichungen

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}\, f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}\, z} \right|$$

sowie

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} .$$

Bew.: Fixiere $z_0 \in B$, $w_0 = f(z_0) \in B$.
Die Möbiustransformationen S und T mit

$$S(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}\, w} , \quad T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}\, z}$$

definieren biholomorphe Abbildungen $S, T : B \to B$ mit $S(w_0) = 0 = T(z_0)$. Die Funktion

$$\tilde{f} = S \circ f \circ T^{-1} : B \to B$$

ist dann analytisch mit $\tilde{f}(0) = 0$, und $|\tilde{f}(z)| \leq 1$ für alle $z \in B$, da $\tilde{f}(B) \subset B$.

Mit Satz 3.4.3 folgt nun

$$\forall z \in B: \quad |\tilde{f}(z)| \leq |z|;$$

also auch

$$\forall z \in B: \quad |\tilde{f}(T(z))| \leq |Tz| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| .$$

Mit

$$\tilde{f}(T(z)) = \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f(z)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)}$$

folgt die erste Behauptung.

Teilen durch $z - z_0$ für $z \neq z_0$ und Grenzübergang $z \to z_0$ ergibt die zweite behauptete Ungleichung.

$\square$

Mit Korollar 3.4.8 erhalten wir die folgende überraschende Charakterisierung biholomorpher Transformation von $B = B_1(0)$.

<u>Kor. 3.4.9.</u> Sei $f : B \to B$ biholomorph. Dann gibt es $z_0 \in B$ und $\theta \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad z \in B.$$

<u>Bew.:</u> Wenden wir Kor. 3.4.8 sowohl für f als auch für f^{-1} an, so folgt

$$\forall z, z_0 \in B : \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|.$$

Wählen wir $z_0 \in B$ so, daß $f(z_0) = 0$,

$$T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad z \in B,$$

wie im Beweis von Kor. 3.4.8, so erfüllt $\tilde{f} = f \circ T^{-1}$ die Gleichung

$$|\tilde{f}(T(z))| = |f(z)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| = |T(z)|, \quad z \in B,$$

also

$$\tilde{f}(z) = e^{i\theta} z, \quad z \in B,$$

für ein $\theta \in \mathbb{R}$, und

$$f(z) = \tilde{f}(T(z)) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad z \in B.$$

$\square$

Bem. 3.4.3: Mit Kor. 3.4.9 folgt, daß die biholomorphen Abbildungen der Kreisscheibe eine von 3 reellen Parametern bestimmte Familie von Möbiustransformationen bilden, die Möbiusgruppe.

4. Residuenkalkül

4.1 Pole und wesentliche Singularitäten

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, und sei $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Def. 4.1.1. Die Stelle $a \in \Omega$ heißt

i) hebbare Singularität, falls

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0;$$

ii) Pol von f, falls

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty;$$

iii) wesentliche Singularität von f, andernfalls.

Bem. 4.1.1. Falls $a \in \Omega$ eine hebbare Singularität von f ist, so können wir gemäß Satz 3.4.2 die Funktion f zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ fortsetzen.

Beisp. 4.1.1. i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$ hat die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\},$$

einen Pol an der Stelle a.

ii) Seien $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome ohne gemeinsame Nullstellen, $f = p/q : \mathbb{C} \setminus Z \to \mathbb{C}$, wo

$$Z = \{z \in \mathbb{C};\ q(z) = 0\}.$$

Dann hat f an jeder Stelle $a \in Z$ einen Pol.

Bew.: Da nach Annahme $p(z) \neq 0$ für jedes $z \in Z$, gilt für jedes $a \in Z$:

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} \frac{|p(z)|}{|q(z)|} = \infty.$$

iii) Die Funktion $f(z) = \exp(1/z)$, $z \in \mathbb{C}$, hat an der Stelle $a = 0$ eine wesentliche Singularität.

Bew.: Es gilt (für $z = x + iy \in \mathbb{C}$):

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty \neq \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0.$$

Das Verhalten von f bei einer Polstelle $a \in \Omega$ kann man durch Betrachten der holomorphen Funktion $h = \frac{1}{f} : B_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, $0 < r << 1$, sehr leicht vollständig charakterisieren, da mit

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$$

folgt, daß gilt

$$\lim_{z \to a} h(z) = 0,$$

womit die Singularität $a \in \Omega$ von h hebbar ist und sich h zu einer holomorphen Funktion in einer Umgebung von a fortsetzen läßt, für die die Cauchysche Integraldarstellung sowie die Darstellung als Potenzreihe gemäß Satz 3.4.1 und Kor. 3.4.1 gültig sind.

Auf diesem Weg erhält man den folgenden Satz.

<u>Satz</u> 4.1.1: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol an der Stelle z_0. Dann gilt:

i) Es gibt genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $g: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so daß

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n_0}}, \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\}:$$

ii) Es gibt $b_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n_0$, mit $b_{n_0} \neq 0$, wobei n_0 wie in i), und eine holomorphe Funktion $\phi: \Omega \to \mathbb{C}$, so daß

$$f(z) = \frac{b_{n_0}}{(z - z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \phi(z), \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

und

iii) für $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ gilt

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

Def. 4.1.2. Die Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ in Satz 4.1.1 heißt <u>Ordnung</u> der Polstelle z_0.

<u>Bew.:</u> i) Da $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$, existiert $r > 0$ mit

$$\forall\, z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} : |f(z)| \geq 1 .$$

Die Funktion $h = 1/f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist holomorph und beschränkt. Nach Satz 3.4.2 läßt sich h zu einer holomorphen Funktion h auf ganz $B_r(z_0)$ fortsetzen mit

$$h(z_0) = \lim_{z \to z_0} 1/f(z) = 0 .$$

Da somit h nicht konstant ist, $B_r(z_0)$ zshg, existiert nach Kor. 3.4.2 ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$h^{(n_0)}(z_0) \neq 0 ,$$

und nach Kor. 3.4.1 können wir h entwickeln

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$= (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n - n_0}$$

$$=: (z - z_0)^{n_0}\, l(z)$$

mit
$$l(z) := \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0} .$$

Nach Bem. 3.4.1. ii) konvergiert die Potenzreihe l lokal gleichmäßig in $B_r(z_0)$. mit $l(z_0) = h^{(n_0)}(z_0)/n_0! \neq 0$.

Die Funktion $g = 1/l$ mit
$$g(z) = \frac{1}{l(z)} = \frac{(z-z_0)^{n_0}}{h(z)} = (z-z_0)^{n_0} f(z)$$
ist dann holomorph in Ω mit $g(z_0) \neq 0$, und
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}} .$$

ii) Entwickeln wir
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$
gemäß Kor. 3.4.1, so folgt
$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z-z_0)^{n_0}} + \frac{g'(z_0)}{(z-z_0)^{n_0-1}} + \dots + \frac{g^{(n_0-1)}(z_0)}{(n_0-1)!(z-z_0)} + \phi(z)$$

mit
$$\phi(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0},$$

wie gewünscht.

iii) Schließlich gilt nach Satz 3.4.1 für $z_0 \neq z \in B_r(z_0)$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{n=1}^{n_0} I_n,$$

wobei mit $b_n = g^{(n_0-n)}(z_0)/(n_0-n)!$ gilt

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{b_n}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} d\zeta, \quad 1 \leq n \leq n_0.$$

<u>Beh.:</u> $I_n = 0$, $1 \leq n \leq n_0$.

<u>Bew.:</u> Für $z \in B_r(z_0)$, $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ schreibe

$$\zeta - z = \zeta - z_0 + z_0 - z = (\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right).$$

Beachte, daß $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$, gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_r(z_0)$. Somit können wir entwickeln

$$\frac{1}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)} = \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1+n}} .$$

Da $n \geq 1$, hat für jedes $k \geq 0$ die Funktion

$$p(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1+n}}$$

die Stammfunktion $P(\zeta) = -\frac{1}{k+n} \cdot \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+n}}$,

und $I_n = 0$ gemäß Satz 3.1.1.

$\square$

Sei $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung n_0 an der Stelle z_0.

mit

$$(4.1.1) \quad f(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z)$$

wie in Satz 4.1.1. ii).

<u>Def.</u> 4.1.3. Die Summe

$$P(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

heißt <u>Hauptteil</u> von f an der Polstelle z_0,

$$b_1 =: \operatorname{res}_{z_0} f$$

heißt das <u>Residuum</u> von f an dieser Stelle.

<u>Bem.</u> 4.1.2. i) Da alle Terme außer dem Term $\frac{b_1}{z-z_0}$ in der Entwicklung (4.1.1) von f Stammfunktionen besitzen, gilt nach den Sätzen 3.1.1, 3.3.2 und 3.4.1 für $r>0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\, dz \overset{(\text{Satz } 3.1.1 \text{ u. } 3.3.2)}{=} \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} \overset{(\text{Satz } 3.4.1)}{=} b_1 = \operatorname{res}_{z_0} f.$$

ii) Weitere Darstellungen des Residuums erhält man durch Multiplikation

$$(z-z_0)^{n_0} f(z) = b_{n_0} + b_{n_0-1}(z-z_0) + \dots + b_1 (z-z_0)^{n_0-1}$$

$$+ (z-z_0)^{n_0} \phi(z).$$

Es folgt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n_0-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n_0-1} \left((z-z_0)^{n_0} f(z)\right).$$

iii) Insbesondere, falls

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z)$$

bei z_0 eine einfache Polstelle (mit $n_0=1$) besitzt, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} (z-z_0) f(z).$$

iv) Umgekehrt folgt aus der Existenz von

$$b_1 = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} (z-z_0) f(z)$$

mit $b_1 \neq 0$, daß f bei z_0 einen Pol der Ordnung $n_0 = 1$ hat mit $b_1 = \operatorname{res}_{z_0} f$. Wegen

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} (z-z_0)\left(f(z) - \frac{b_1}{z-z_0}\right) = 0$$

hat dann nämlich $\phi(z) := f(z) - \frac{b_1}{z-z_0}$ eine hebbare Sing. bei z_0.

Falls die holomorphe Funktion f mehr als eine Polstelle besitzt, können wir Bem. 4.1.2. i) wie folgt verallgemeinern.

<u>Satz</u> 4.1.2 (Residuensatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1, \ldots, z_K \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{z_k;\ 1 \le k \le K\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen bei z_k, $1 \le k \le K$.

Dann gilt für jeden Kreis $B = B_R(z_0)$, $R > 0$, mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und mit $\partial B_R(z_0) \subset \Omega \setminus \{z_k;\ 1 \le k \le K\}$ die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} f(z)\,dz = \sum_{k:\, z_k \in B_R(z_0)} \operatorname{res}_{z_k} f .$$

<u>Bew.</u>: OBdA gelte $z_k \in B_R(z_0)$, $1 \le k \le K$.

Für genügend kleine $r > 0$ und

$$U = B_R(z_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{K} B_r(z_k)$$

gilt analog zum Beweis von Satz 3.4.2

$$0 = \int_{\partial U} f(z)\,dz = \int_{\partial B_R(z_0)} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial B_r(z_k)} f(z)\,dz ,$$

und $\displaystyle\int_{\partial B_r(z_k)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f$, $1 \le k \le K$,

gemäß Bem. 4.1.2. $\square$

Beisp. 4.1.2. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \overset{(y=\arctan x)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy = \pi$$

mittels Residuensatz, wie folgt.

Betrachte

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

mit einfachen Polen bei $z = \pm i$ und

$$\mathrm{res}_{\{z=i\}} f = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \frac{1}{2i} ,$$

und für $0 < r \ll 1 \ll R$ betrachte

$$U = U_{R,r} = B_R^+(0) \setminus B_r(i) ,$$

wobei

$$B_R^+(0) = \{z = x+iy;\ |z| < R, y > 0\}.$$

Wiederum zeigt eine Zerlegung $U = \bigcup_{k=1}^{K} U_k$ mittels einem genügend feinem, achsenparallelen Gitter, so daß $U_k \subset B_{r_k}(z_k) \subset \overline{B_{r_k}(z_k)} \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, $1 \leq k \leq K$, daß gilt

$$\int_{\partial U} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial U_k} f(z)\,dz = 0 .$$

Andererseits gilt

$$\int_{\partial U} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\partial B_r(i)} f(z)\,dz ,$$

wobei $\quad \gamma_R(t) = R\,e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi .$

Mit

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} = \frac{1}{R^2 - 1}, \quad |z| = R ,$$

folgt

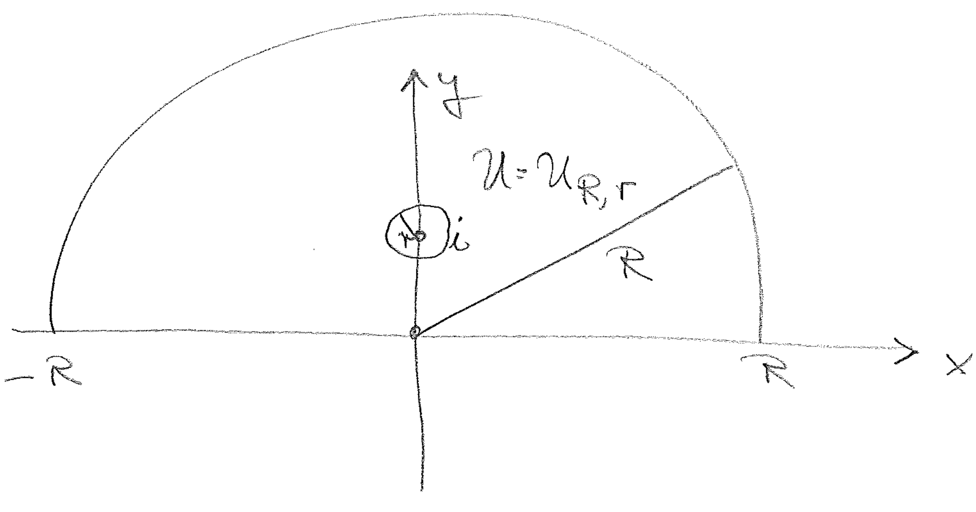
$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| \leq \pi R \max_{|z|=R} |f(z)| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \longrightarrow 0 ;$$
$$(R \to \infty)$$

weiter gilt nach Bem. 4.1.2.i) für $0 < r < 2$:

$$\int_{\partial B_r(i)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\{z=i\}} f = \pi .$$

Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \pi .$$



<u>Beisp. 4.1.3.</u> Sei $0 < a < 1$. Wir zeigen

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Betrachte dazu

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i(\pi + 2\pi k);\ k \in \mathbb{Z}\},$$

und die Gebiete

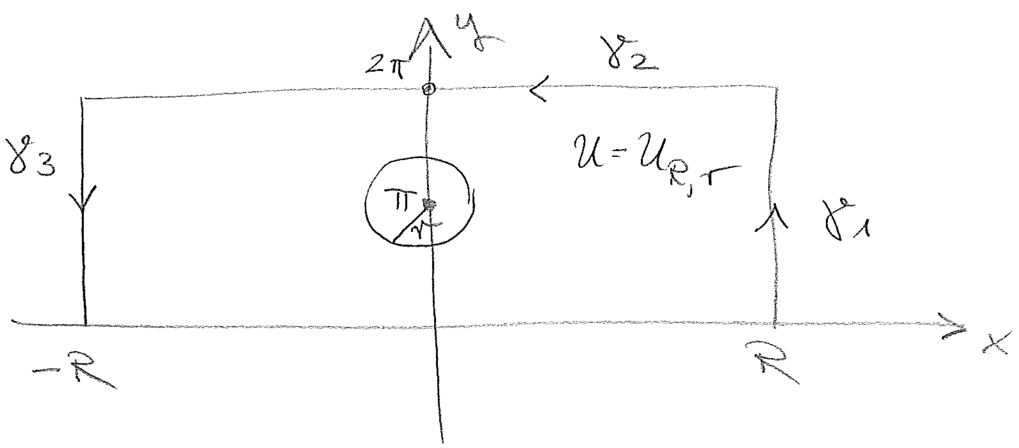
$$U = U_{R,r} = \{z = x+iy;\ |x| < R,\ 0 < y < 2\pi\} \setminus B_r(i\pi)$$

für $0 < r \ll 1 \ll R < \infty$. Wieder gilt

$$0 = \int_{\partial U} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx + \int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\partial B_r(i\pi)} f(z)\,dz,$$

wo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit

$$\gamma_1(t) = R + it, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\gamma_2(t) = R - t + 2\pi i, \quad 0 \le t \le 2R,$$
$$\gamma_3(t) = -R + i(2\pi - t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$



Mit

$$|f(z)| \leq \frac{e^{aR}}{e^{R}-1} \leq 2\, e^{(a-1)R} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0\,, \quad z = R+iy\,,$$

folgt $\left| \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \right| \leq 4\pi\, e^{(a-1)R} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0\,.$

Analog folgt mit

$$|f(z)| \leq \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \leq 2e^{-aR} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0\,, \quad z = -R+iy$$

die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma_3} f(z)\,dz \right| \leq 4\pi e^{-aR} \underset{(\log 2 \leq R \to \infty)}{\longrightarrow} 0\,.$$

Weiter gilt

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi i a}\cdot e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx \underset{(R \to \infty)}{\longrightarrow} -e^{2\pi i a}\, I\,;$$

also

$$\left(1-e^{2\pi i a}\right) I = \int_{\partial B_r(i\pi)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\{z=i\pi\}} f\,.$$

Mit Bem. 4.1.2. iii) erhalten wir

$$\operatorname{res}_{\{z=i\pi\}} f = \lim_{z\to i\pi} (z-i\pi) f(z)$$

$$= \lim_{z\to i\pi} e^{az} \frac{z-i\pi}{e^z - e^{i\pi}} = \frac{e^{i\pi a}}{\exp'(i\pi)} = -e^{i\pi a};$$

also

$$I = -\frac{2\pi i\, e^{i\pi a}}{1-e^{2\pi i a}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Satz 4.1.1 liefert eine nahezu vollständige Beschreibung einer holomorphen Funktion in der Umgebung einer Polstelle.

Das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist davon radikal verschieden, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.1.3 (Casorati - Weierstrass). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität an der Stelle $z_0 \in \Omega$.
Dann gilt

$$\forall r > 0 : \quad \overline{f\left(B_r(z_0) \cap \Omega\right)} = \mathbb{C} .$$

Bew.: (indirekt). Nimm an, es gibt $w_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ mit

$$\delta := \inf \left\{ |f(z) - w_0| ; \; z \in B_r(z_0) \cap \Omega \right\} > 0 .$$

Die Funktion $g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$, $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, ist dann holomorph und beschränkt. Nach

Satz 3.4.2 können wir g zu einer holomorphen Funktion $g: B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ fortsetzen, und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$= (z-z_0)^{n_0} h(z)$$

mit minimalem $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und holomorphem

$$h(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-n_0}$$

gemäß Kor. 3.4.1. ii), mit $h(z_0) \neq 0$.

Es folgt

$$f = w_0 + \frac{1}{g} \quad \text{in } B_r(z_0) \setminus \{z_0\},$$

und f hat eine hebbare Singularität an der Stelle z_0, falls $n_0 = 0$, bzw. einen Pol der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, falls $n_0 > 0$.

Beide Fälle widersprechen jedoch unserer Annahme, daß z_0 wesentliche Singularität ist.

$\square$

Bem. 4.1.3. Gemäß einem tief liegenden Satz von Picard gilt für holomorphes $f: \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei z_0 sogar, daß mit Ausnahme allenfalls eines einzigen Punktes $w_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion f jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ in jeder Umgebung $B_r(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}$, $r > 0$, annimmt.

Beisp. 4.1.4. Die Funktion $f(z) = \exp(1/z)$, $z \neq 0$, hat bei $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, und es gilt

$$\forall r > 0 : f\left(B_r(0) \setminus \{0\}\right) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Trotz der in Satz 4.1.3 hervortretenden Unterschiede zwischen Polstellen und wesentlichen Singularitäten führt die im Beweis vom Cauchy'schen Darstellungssatz (Satz 3.4.1) und von Kor. 3.4.1 zu einer dem Hauptteil einer holomorphen Funktion mit Polstelle ähnlichen Darstellung im Falle einer wesentlichen Singularität.

<u>Satz</u> 4.1.4 (Laurent-Reihenentwicklung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$. Dann gibt es Koeffizienten a_n, $n \in \mathbb{Z}$, so daß für jedes $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei die Reihe lokal gleichmäßig in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ absolut konvergiert.
Im Falle, daß f bei z_0 eine Polstelle hat der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, gilt zudem $a_n = 0$ für $n < n_0$.

Bew.: Sei $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, und seien $r > 0$, $\varepsilon > 0$ mit $z \in A_{R,r}(z_0) := B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$, $B_{2\varepsilon}(z) \subset A_{R,r}(z_0)$. Für $\mathcal{U} := A_{R,r}(z_0) \setminus B_\varepsilon(z)$ gilt gemäß Kor. 3.3.1

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

wobei

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

gemäß Satz 3.4.1. Es folgt:

$$\forall z \in A_{R,r}(z_0): \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Entwickle nun für $|z - z_0| < R = |\zeta - z_0|$, $\zeta \in \partial B_R(z_0)$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

in eine gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ und lokal gleichmäßig in $z \in A_{R,r}(z_0)$ absolut konvergente Reihe.

Ebenso erhalten wir für $|\zeta - z_0| = r < |z - z_0|$ die gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ und lokal gleichmäßig in $z \in A_{R,r}(z_0)$ absolut konvergente Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} .$$

Vertauschen von Summation und Integration ist daher möglich und ergibt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta \cdot (z - z_0)^{-n-1}\right),$$

wobei $a_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta$, $n \in \mathbb{N}_0$, gemäß Kor. 3.3.1 unabhängig ist von $0 < r < R$.
Falls z_0 Polstelle von f ist der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, so folgt mit der Darstellung $f(z) = g(z)/(z - z_0)^{n_0}$ gemäß Satz 4.1.1. i) und Satz 3.3.2 für $n \geq n_0$

$$\int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta = \int_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta)(\zeta - z_0)^{n - n_0} d\zeta = 0 ,$$

da $G_n(z) = g(z)(z - z_0)^{n - n_0}$ holomorph in $B_r(z_0)$, $n \geq n_0$.

$\square$

Mit Hilfe von Satz 4.1.4 kann man den Residuensatz, Satz 4.1.2, wie folgt verallgemeinern.

<u>Satz</u> 4.1.5 (Residuensatz, allgemeine Fassung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1, \ldots, z_K \in \Omega$, und sei $f: \Omega \setminus \{z_k;\ 1 \le k \le K\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden Kreis $B_R(z_0) \subset \overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ mit $\partial B_R(z_0) \subset \left(\Omega \setminus \{z_k;\ 1 \le k \le K\}\right)$ die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} f(z)\,dz = \sum_{k:\, z_k \in B_R(z_0)} \operatorname{res}_{z_k} f .$$

Der <u>Beweis</u> ist derselbe wie der Beweis von Satz 4.1.2, wobei wir Satz 4.1.4 benutzen zur Berechnung der Integrale

$$\int_{\partial B_r(z_k)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f$$

für genügend kleines $r > 0$, mit

$$\operatorname{res}_{z_k} f = a_{-1}^{(k)}$$

aus der Laurent-Reihenentwicklung von f um z_k.

4.2 Meromorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Def. 4.2.1. f ist *meromorphe* Funktion auf Ω, falls es eine höchstens abzählbare Menge von Punkten $(z_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω gibt mit

i) $f : \Omega \setminus \{z_k;\ k \in \mathbb{N}_0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph;

ii) f hat eine Polstelle bei z_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Bem. 4.2.1. i) Führen wir auf $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Topologie $\tau_{\overline{\mathbb{C}}}$ ein der Mengen U mit

a) $\infty \notin U \Rightarrow U \subset \mathbb{C}$ offen,

b) $\infty \in U \Rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ ist kompakt,

so sind meromorphe Funktion f auf Ω stetige Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{C}}$.

ii) Bezüglich der Topologie $\tau_{\overline{\mathbb{C}}}$ ist $\overline{\mathbb{C}}$ überdeckungskompakt.

Der Fall $\Omega = \mathbb{C}$ ist von besonderem Interesse.

<u>Def.</u> 4.2.2. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt eine <u>ganze Funktion</u>.

Das Verhalten im Unendlichen kann man durch Betrachten von

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

analog zu Def. 4.1.1 klassifizieren.

<u>Def.</u> 4.2.3. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ heißt <u>meromorph</u> <u>auf</u> $\mathbb{C}$, falls für ein $R > 0$ gilt:

i) $f|_{B_{2R}(0)} : B_{2R}(0) \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist meromorph;

ii) $f|_{\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}} : \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)} \to \mathbb{C}$ ist holomorph

und

iii) $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) : B_{1/R}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ hat eine hebbare Singularität oder einen Pol an der Stelle $z_0 = 0$.

Bem. 4.2.2. i) Im Falle von einer meromorphen Funktion $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ wie in Def. 4.2.3 sprechen wir dann von einer hebbaren Singularität oder einer Polstelle im Unendlichen, je nachdem, ob $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität oder eine Polstelle der Funktion $F(z) = f(\frac{1}{z})$ ist.

ii) Mit der in Bem. 4.2.1 eingeführten Topologie ist eine meromorphe Funktion $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ stetig.

Meromorphe Funktionen $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ lassen sich wie folgt klassifizieren.

Satz 4.2.1. Sei $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist f rational; d.h., $f = p/q$ mit Polynomen $p, q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

<u>Bew.:</u> Da f nach Definition außerhalb eines genügend großen Balles $B_R(0)$ holomorph, gibt es höchstens endlich viele Polstellen $z_0, \dots, z_K \in \mathbb{C}$ von f.

Mit Satz 4.1.1 erhalten die Darstellung

$$f(z) = \frac{b_{n_0}^{(0)}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1^{(0)}}{z-z_0} + f_0(z)$$

mit einer meromorphen Funktion $f_0 : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit Polstellen $z_1, \dots, z_K \in \mathbb{C}$. Durch Iteration erhalten wir

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \left(\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \dots + \frac{b_1^{(k)}}{z-z_k} \right) + f_K(z)$$

mit einer meromorphen Funktion f_K mit noch höchstens einem Pol bei Unendlich.

Für
$$F_K(z) = f_K\left(\frac{1}{z}\right)$$
liefert wiederum Satz 4.1.1 die Darstellung

$$F_K(z) = \frac{b^{(\infty)}_{n_\infty}}{z^{n_\infty}} + \dots + \frac{b^{(\infty)}_1}{z} + G(z) \,,$$

wobei $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, also

$$g(z) = G\left(\frac{1}{z}\right) = f_K(z) - b^{(\infty)}_1 z - \dots b^{(\infty)}_{n_\infty} z^{n_\infty}$$

holomorph und beschränkt.

Mit Kor. 3.4.4 (Liouville) folgt $g \equiv b^{(\infty)}_0 \in \mathbb{C}$,

also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \left(\frac{b^{(k)}_{n_k}}{(z-z_k)^{n_k}} + \dots + \frac{b^{(k)}_1}{z-z_k} \right)$$

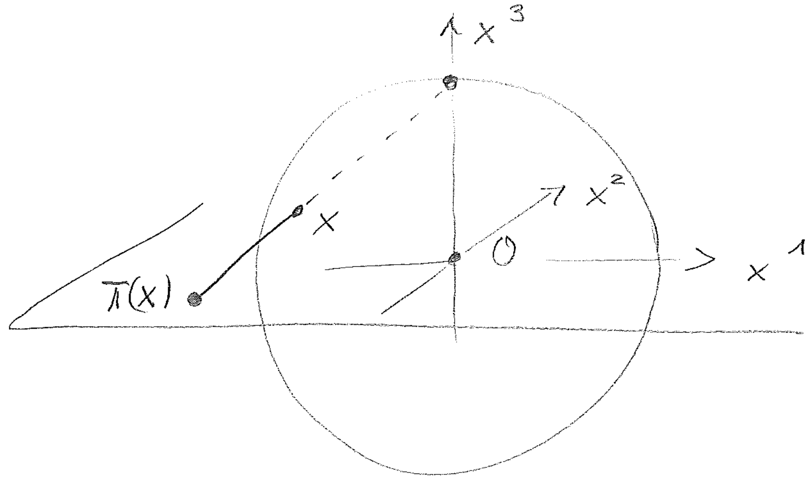
$$+ b^{(\infty)}_0 + b^{(\infty)}_1 z + \dots + b^{(\infty)}_{n_\infty} z^{n_\infty}$$

rational. $\square$

Die Riemannsche Zahlenkugel. Mittels der stereographischen Projektion

$$\pi : S^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3;\ |x| = 1\} \to \overline{\mathbb{C}}$$

(4.2.1) $$x \longmapsto z = \frac{x^1 + i x^2}{1 - x^3}$$



mit der Inversen

$$\Phi : \mathbb{C} \ni z = x + iy \longmapsto \frac{1}{1+|z|^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix} \in S^2,$$

stetig im Punkt $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ ergänzt durch

$$\Phi(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \in S^2,$$

können wir die erweiterte komplexe Ebene mit der Standardsphäre identifizieren, und π, Φ sind stetig bzgl. der in Bem. 4.2.1 eingeführten Topologie $\tau_{\overline{\mathbb{C}}}$.

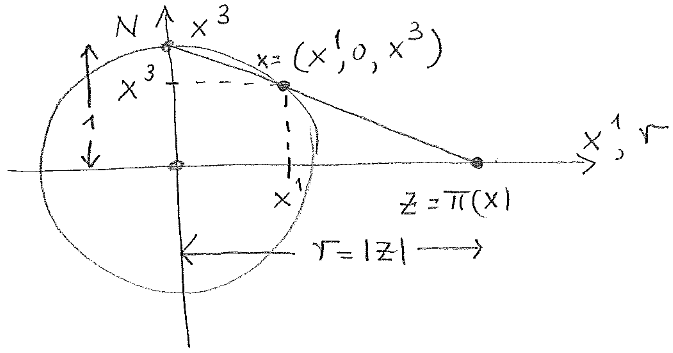
Für eine meromorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist dann die induzierte Funktion

$$\tilde{f} = \Phi \circ f \circ \pi : S^2 \to S^2$$

stetig.

"Die Riemann-Sphäre S^2 ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$."

<u>Bem.</u> 4.2.3: Die Formel (4.2.1) erhält man mittels Strahlensatz.



Mit

$$r = \frac{r}{1} = \frac{r - x^1}{x^3} \quad , \quad r(1 - x^3) = x^1$$

folgt (4.2.1) für $x^2 = 0$, $x^1 > 0$. Weiter folgt mit $x^1 = \sqrt{1 - |x^3|^2}$ heraus $r^2 = \frac{1 - |x^3|^2}{(1 - x^3)^2} = \frac{1 + x^3}{1 - x^3}$

und

$$1 + r^2 = \frac{2}{1 - x^3}, \quad \text{also } x^1 = \frac{2r}{1 + r^2}, \quad x^3 = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}.$$

4.3 Das Argumentprinzip.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) \neq 0$.

Für $z \in \Omega$ nahe bei z_0 ist dann

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$$

bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ erklärt. Treffen wir eine Wahl für $\arg f(z_0)$, so können wir durch die Forderung der Stetigkeit für genügend kleine $r > 0$ eine holomorphe Funktion $\phi : \Omega \cap B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ erklären mit

$$\phi(z) = \log f(z), \quad z \in \Omega \cap B_r(z_0),$$

und

$$\phi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega \cap B_r(z_0),$$

ist unabhängig von der Wahl des Arguments von $f(z)$.

Bem. 4.3.1. i) Falls $f_1, f_2 : \Omega \xrightarrow{\text{holom.}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so gilt

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2};$$

analog für $f_1, \dots, f_K : \Omega \xrightarrow{\text{holom.}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obwohl also für den (Hauptzweig des) Logarithmus im Allgemeinen das Additionstheorem

$$\log(f_1 f_2) = \log f_1 + \log f_2$$

nicht gilt, verhält sich die logarithmische Ableitung so, als wäre dies der Fall.

ii) Falls f an der Stelle z_0 einen Pol hat der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}, \quad z \in \Omega,\ z \neq z_0,$$

mit einer holomorphen Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so gilt gemäß i) für $0 < r << 1$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_0}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in B_r(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}.$$

iii) Analog erhalten wir für

$$f(z) = (z-z_0)^{n_0} g(z)$$

mit einer Nullstelle der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$ bei $z_0 \in \Omega$ und einer holomorphen Funktion $g: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_0}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in B_r(z_0) \cap \Omega, \, z \neq z_0,$$

für $r > 0$ mit $g(z) \neq 0$ auf $B_r(z_0) \cap \Omega$.

Zusammen mit Satz 4.1.2 liefert Bem. 4.3.1 das folgende Ergebnis.

<u>Satz</u> 4.3.1 (Argumentprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph, und sei U beschränkt mit $\overline{U} \subset \Omega$ und so, daß f weder Polstellen noch Nullstellen auf ∂U besitzt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z_k \in U \\ \text{ist Nullstelle von } f \\ \text{der Ordnung } n_k \in \mathbb{N}}} n_k - \sum_{\substack{z_j \in U \\ \text{ist Polstelle von } f \\ \text{der Ordnung } m_j}} m_j .$$

Bem.: Für $0<r<<1$ betrachte

$$U_r = U \setminus \bigcup_{z_k \in Z} B_r(z_k) ,$$

wobei

$$Z = \{ z_0 \in U ; \; f(z_0) = 0 \text{ oder } \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} |f(z)| = \infty \} .$$

Da $F := f'/f$ in einer Umgebung von U_r holomorph ist, gilt gemäß Kor. 3.3.1

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \sum_{z_k \in Z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_k)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz ,$$

und gemäß Satz 4.1.2 und Bem. 4.3.1 gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_k)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_k \in \mathbb{Z} ,$$

falls z_k Nullstelle der Ordnung n_k, bzw. Polstelle der Ordnung $-n_k$ ist, und falls $r>0$ so klein gewählt ist, daß

$G(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ wie in Bem. 4.3.1 holomorph ist in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$. $\square$

Satz 4.3.2 (Rouché) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und für $B = B_R(z_0)$ mit $\overline{B} \subset \Omega$ gelte

$$\forall z \in \partial B : |f(z)| > |g(z)| .$$

Dann haben f und die Funktion $f+g$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität) in B.

Bew.: Für $0 \le t \le 1$ betrachte

$$f_t(z) = f(z) + t g(z), \quad z \in \Omega .$$

Mit $|f(z)| > |g(z)| \ge 0$ für $z \in \partial B$ folgt

$$\forall z \in \partial B : |f_t(z)| > 0, \quad 0 \le t \le 1 ,$$

und gemäß Satz 4.3.1 ist

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} \, dz \in \mathbb{N}_0$$

die Anzahl der Nullstellen (mit Multiplizität) von f_t in B. Da aufgrund der Definition n_t stetig von $0 \le t \le 1$ abhängt, folgt $n_1 = n_0$.

$\square$

Anwendung von Satz 4.3.2 führt auf einen einfachen Beweis der folgenden Aussage.

<u>Lemma</u> 4.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht konst. mit $f'(z_0) = 0$, $w_0 = f(z_0)$. Dann gibt es $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und $\delta > 0$ so, daß jedes $w \in B_\delta(w_0)$ mindestens zwei verschiedene Urbilder $z_1, z_2 \in B_r(z_0)$ besitzt.

<u>Bew.</u>: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle z_0 der Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$. Schreibe

$$f(z) - w_0 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

$$=: a_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + G(z)$$

mit $a_{n_0} = f^{(n_0)}(z_0)/n_0! \neq 0$. Wähle $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und

$$\sup_{z \in \partial B_r(z_0)} |G(z)| < \frac{1}{2}|a_{n_0}| r^{n_0} =: \delta.$$

Wegen Kor. 3.4.3 können wir zudem annehmen, indem wir $r>0$ notfalls verkleinern, daß $f'(z)\neq 0$ für $z\in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$.

Für $w\in B_\delta(w_0)$ betrachte nun

$$F(z) = w_0 - w + a_{n_0}(z-z_0)^{n_0},$$

so daß

$$f(z) - w = F(z) + G(z), \quad z\in B_r(z_0).$$

Nach Wahl von $r>0$ und $\delta>0$ gilt

$$\forall z\in\partial B_r(z_0): \ |F(z)| \geq \underbrace{|a_{n_0}|r^{n_0}}_{=2\delta} - \underbrace{|w-w_0|}_{<\delta} > \delta > |G(z)|.$$

Gemäß Satz 4.3.2 haben die Funktionen F und $F+G=f-w$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität) in $B_r(z_0)$, nämlich n_0, die Anzahl Nullstellen von F. Da $f'(z)\neq 0$ für $z\in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ sind für $w\neq w_0$ diese Nullstellen einfach; es gibt also $n_0\geq 2$ verschiedene Punkte $z_1,\dots,z_{n_0}\in B_r(z_0)$ mit $f(z_k)=w$, $1\leq k\leq n_0$.

$\square$

<u>Kor.</u> 4.3.1 (Offenheit holomorpher Funktionen)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg, $f : \Omega \to \mathbb{C}$
holomorph und nicht konstant, $U \subset \Omega$ offen.
Dann ist $f(U)$ offen.

<u>Bew.:</u> Sei $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in U$.

<u>Beh.:</u> $f(U)$ enthält eine offene Umg. von w_0.

<u>Bew.:</u> Wir unterscheiden zwei Fälle.

i) Falls $f'(z_0) = 0$, so folgt mit Lemma 4.3.1, daß $f(U)$ eine offene Umgebung von w_0 enthält.

ii) Falls $f'(z_0) \neq 0$, so folgt die Behauptung aus dem Umkehrsatz, Satz 2.4.1.

$\square$

Kor. 4.3.2 (Biholomorphiesatz)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0$ für jedes $z \in \Omega$, und f ist eine biholomorphe Abbildung von Ω auf $\tilde{\Omega} := f(\Omega)$.

Bew.: (OBdA $\Omega \neq \emptyset$.) Da $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektiv, ist f nicht konstant, und $f'(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$ folgt mit Lemma 4.3.1.

Gemäß dem Umkehrsatz (Satz 2.4.1) ist f lokal biholomorph, die (aufgrund der Injektivität von f wohldefinierte) Umkehrfunktion $f^{-1} : \tilde{\Omega} \to \Omega$ also holomorph.

$\square$

5. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

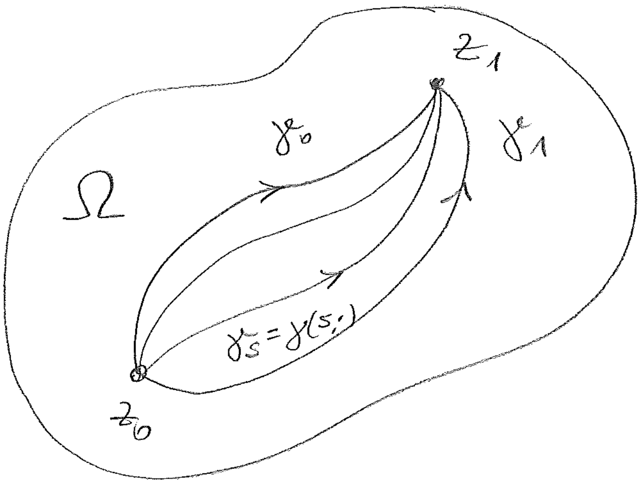
5.1 Homotopien, einfach zshg. Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit

$$\gamma_0(0) = z_0 = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = z_1 = \gamma_1(1).$$

Def. 5.1.1. i) γ_0 und γ_1 heißen zueinander homotop (bei festen Endpunkten), falls $\gamma \in C^0([0,1]\times[0,1]; \Omega)$ existiert mit

$$\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \quad \gamma(1,t) = \gamma_1(t), \quad 0 \le t \le 1,$$
$$\gamma(s,0) = z_0, \quad \gamma(s,1) = z_1, \quad 0 \le s \le 1.$$



ii) Falls $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, so heißt γ eine C^k-Homotopie, falls $\gamma \in C^k$; insbesondere gilt dann: $\forall s \in [0,1]: \gamma_s = \gamma(s,\cdot) \in C^k$, $s \mapsto \gamma_s \in C^k$ stetig.

Bem. 5.1.1. Für homotope $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, gibt es stets eine C^k-Homotopie.

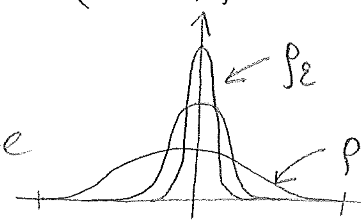
Zum Beweis benutzen wir das Hilfsmittel der <u>Faltung</u> einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit einem <u>glättenden</u> <u>Kern</u>.

Sei dazu $0 \leq \rho = \rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(\rho) \subset B_1(0)$

und $$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1.$$

Für $0 < \varepsilon < 1$ setze $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0)) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

mit $$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx \overset{(y = \frac{x}{\varepsilon})}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, dy = 1 \qquad (5.1.1)$$



und zu gegebenem $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ setze

$$(f * \rho_\varepsilon)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, \rho_\varepsilon(y)\, dy \qquad (5.1.2)$$

$$\overset{(z := x-y)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, \rho_\varepsilon(x-z)\, dz \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

mit $d(f * \rho_\varepsilon) = (df * \rho_\varepsilon)$ wegen (5.1.2) und mit

$$\| f * \rho_\varepsilon - f \|_{C^0} \overset{(5.1.1)}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x)\big)\, \rho_\varepsilon(y)\, dy \right|$$

(5.1.3) $$\leq \underbrace{\sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ |y| < \varepsilon}} |f(x-y) - f(x)|}_{\to 0 \ (\varepsilon \downarrow 0)} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\rho_\varepsilon(y)}_{\geq 0}\, dy}^{= 1},$$

da $\mathrm{supp}(f)$ nach Annahme kompakt, f also gleichmäßig stetig; analog für die Ableitung df.

<u>Bew.</u> <u>von</u> <u>Bem.</u> 5.1.1. Nach Umparametrisierung $\tilde{\gamma}_0(t) = (\gamma_0 \circ \varphi)(t)$, etc, mit $\varphi \in C^1([0,1];[0,1])$, wo $\varphi' \geq 0$, $\varphi(t) = 0$ für $t \leq \varepsilon_0$, $\varphi(t) = 1$ für $t \geq 1-\varepsilon_0$ für eine Zahl $0 < \varepsilon_0 < 1/2$, dürfen wir annehmen, daß gilt

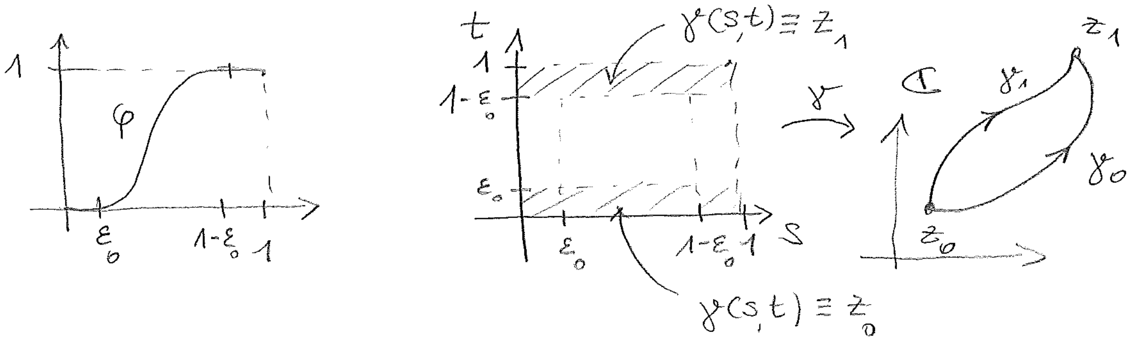
$$\gamma_{0,1}(t) = \gamma_{0,1}(0) = z_0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon_0,$$

$$\gamma_{0,1}(t) = \gamma_{0,1}(1) = z_1 \quad \text{für } 1-\varepsilon_0 \leq t \leq 1,$$

sowie

$$\gamma(s,\cdot) = \gamma_0 \quad \text{für } 0 \leq s \leq \varepsilon_0,$$

$$\gamma(s,\cdot) = \gamma_1 \quad \text{für } 1-\varepsilon_0 \leq s \leq 1.$$



Sei $0 \leq \rho = \rho(s,t) \in C_c^\infty(B_1(0))$ ein glättender Kern. Für $0 < 2\varepsilon \leq \varepsilon_0$ glätte zunächst $\gamma_0 \equiv \gamma_s = \gamma(s,\cdot)$, $0 \leq s \leq \varepsilon_0$, durch

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = (\gamma_0 * \rho_\varepsilon)(s,t), \quad 0 \leq s \leq \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon.$$

Da $\gamma_0 \in C^1$, folgt mit (5.1.2) auch

$\gamma_s^{(\varepsilon)} = \gamma^{(\varepsilon)}(s,\cdot) \in C^1$ für $0 \leq s \leq \varepsilon$, und

(5.1.3) ergibt $\gamma_s^{(\varepsilon)} \to \gamma_0$ in C^1 für $s \downarrow 0$.

(Betrachte $f = \gamma_0$, bzw. $f = \dot{\gamma}_0$.)

Analog glätten wir $\gamma_1 = \gamma_s$, $1-\varepsilon_0 \leq s \leq 1$, indem wir setzen

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = (\gamma_1 * \rho_{1-s})(s,t), \quad \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon \leq s \leq 1.$$

Weiter setzen wir

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = z_0, \quad 0 \leq s \leq 1, \ 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = z_1, \quad 0 \leq s \leq 1, \ 1-\varepsilon \leq t \leq 1,$$

und schließlich

$$\gamma^{(\varepsilon)}(s,t) = (\gamma * \rho_\varepsilon)(s,t), \quad \varepsilon \leq s,t \leq 1-\varepsilon,$$

um die gewünschte C^1-Homotopie zu erhalten.

Der Cauchy'sche Integralsatz (Satz 3.3.2) liefert das folgende Resultat.

<u>Satz</u> 5.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([0,1];\Omega)$ homotop bei festen Endpunkten. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

<u>Bew.</u>: Sei $\gamma \in C^0([0,1]^2;\Omega)$ eine C^1-Homotopie von γ_0 zu γ_1. Da

$$K = \gamma([0,1]^2) \subset \Omega$$

kompakt, gibt es $r > 0$ mit

$$\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) > r,$$

und endlich viele Bälle $B_r(z_l)$, $1 \le l \le L$, mit $z_l \in K$, so daß $\overline{B_r(z_l)} \subset \Omega$, $1 \le l \le L$, überdecken K.

Für $0 \le s \le 1$ setze $\gamma_s(t) := \gamma(s,t)$ mit $\gamma_s \in C^1([0,1];\Omega)$, und definiere

$$F(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\,dz \in \mathbb{C}.$$

Beh.: $F(s) = F(0) = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz$ für $0 \leq s \leq 1$.

Bew.: Setze

$$I = \{ s \in [0,1] ;\ F(s) = F(0) \}.$$

Dann gilt $0 \in I$; also $I \neq \emptyset$.

Da $s \mapsto \gamma_s \in C^1$ nach Voraussetzung stetig ist, ist auch die Abbildung

$$s \mapsto F(s) = \int_0^1 f(\gamma_s(t))\,\dot{\gamma}_s(t)\,dt$$

stetig; I ist also auch abgeschlossen.

Sei schließlich $s_0 \in I$. Wir zeigen:

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, 0 \leq s \leq 1 : |s - s_0| < \delta \Rightarrow F(s) = F(s_0) = F(0).$$

Sei dazu

$$im(\gamma_{s_0}) = \gamma_{s_0}([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} B_r(z_i),$$

wobei für $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{i_0} = 1$ gelte

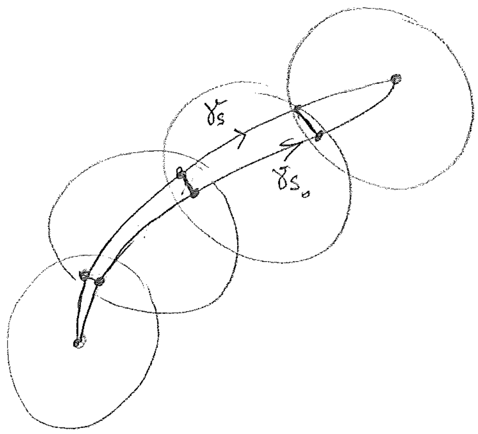
$$(5.1.1) \quad \gamma_{s_0}([t_{i-1}, t_i]) \subset B_r(z_i), \quad 1 \leq i \leq i_0$$

und damit insbesondere

$$(5.1.2) \quad \gamma_{s_0}(t_i) \subset B_r(z_i) \cap B_r(z_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq i_0.$$

(Die Punkte z_i, $1 \leq i \leq i_0$, sind nicht unbedingt paarweise verschieden.)

Da $B_r(z_i)$ offen für jeder i, gibt es $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $s \in [0,1]$ mit $|s - s_0| < \delta$ die Beziehungen (5.1.1), (5.1.2) auch gelten für γ_s.



Da $B_r(z_i) \cap B_r(z_{i+1})$ konvex können wir für jedes $1 \leq i \leq i_0$ die Bögen

$$\gamma_{s_0}|[t_{i-1}, t_i] \quad , \quad \gamma_s|[t_{i-1}, t_i]$$

durch Hinzunahme der geraden Verbindungsstrecken $\gamma^{(i-1)}$, bzw. $\gamma^{(i)}$, wobei

$$\gamma^{(j)}(t) = t\,\gamma_s(t_j) + (1-t)\,\gamma_{s_0}(t_j)\,, \quad 0 \leq t \leq 1\,,$$

zu geschlossenen Kurven

$$\Gamma_i = \gamma_{s_0}|[t_{i-1}, t_i] + \gamma^{(i)} - \gamma_s|[t_{i-1}, t_i] - \gamma^{(i-1)}$$

in $B_r(z_i)$ ergänzen. Mit Satz 3.3.2 folgt

$$F(s_0) - F(s) = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 0.$$

Also ist I auch offen, und damit $I = [0,1]$. $\square$

Def. 5.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heißt Ω *einfach zusammenhängend* (1-zshg.), falls je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit denselben Endpunkten zueinander homotop sind.

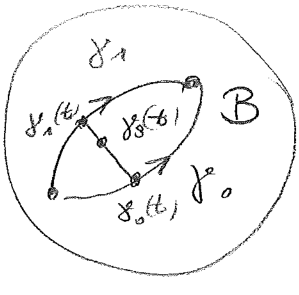
Bem. 5.1.2. i) Insbesondere ist in einem 1-zshg. Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ dann jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$ homotop zum konstanten Weg $\gamma_0(t) = z_0$, $0 \le t \le 1$; d.h. jede geschlossene Kurve ist "zusammenziehbar."

ii) Umgekehrt gilt: Ist jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([0,1]; \Omega)$ zusammenziehbar, so ist Ω 1-zshg.

Beisp. 5.1.1. i) Jeder Ball $B = B_R(z_0)$ ist 1-zshg.

Bew.: Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1], B)$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ ist $\gamma \in C^0([0,1]^2; B)$ mit

$$\gamma(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$$



eine Homotopie von γ_0 nach γ_1

ii) Allgemeiner zeigt der Beweis von i), daß jedes konvexe Gebiet Ω 1-zslg. ist.

iii) Das Gebiet $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ ist 1-zslg., da

$$\Phi :]0,\infty[\times]-\pi, \pi[\ni (r,\theta) \mapsto re^{i\theta} \in \Omega$$

einen Homöomorphismus von Ω auf ein 1-zslg Gebiet definiert.

iv) Die Menge $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht 1-zslg.

<u>Bew.:</u> Andernfalls müßte nach Bem. 5.1.2.i) und Satz 5.1.1 für jede holomorphe Funktion f und jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1], \Omega)$ gelten

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 ;$$

jedoch erhalten wir für $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$, und $\gamma = \partial B_r(0)$, $r > 0$, gemäß Satz 3.4.1

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

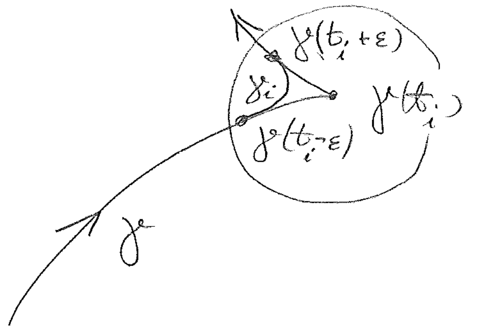
Bem. 5.1.3. Sei $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$

mit
$$\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1([t_{i-1}, t_i]; \Omega), \quad 1 \le i \le i_0,$$

für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i_0} = 1$. Wir können γ in einem Ball $B_i = B_{R_i}(\gamma(t_i)) \subset \overline{B}_i \subset \Omega$, $1 \le i < i_0$, durch einen glatten Bogen γ_i ersetzen mit Endpunkten $\gamma_i(\pm 1) = \gamma(t_i \pm \varepsilon)$, $\dot\gamma_i(\pm 1) = \dot\gamma(t_i \pm \varepsilon)$, $1 \le i < i_0$.

Für $1 \le i < i_0$ gilt dann gemäß Satz 3.3.2

$$\int_{\gamma_i} f(z)\,dz = \int_{\gamma|[t_i-\varepsilon,\, t_i+\varepsilon]} f(z)\,dz$$



und daher auch

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz,$$

wo $\tilde\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$ die so erhaltene Kurve mit $\tilde\gamma(0) = \gamma(0)$, $\tilde\gamma(1) = \gamma(1)$.

Satz 3.1.1 und Satz 5.1.1 ergeben sofort das folgende Resultat.

<u>Satz 5.1.2.</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

<u>Bew.:</u> Nach Satz 5.1.1 und Bem. 5.1.3 ist für jedes $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur abhängig von den Endpunkten von γ, und Satz 3.1.1 liefert das gewünschte F. $\square$

Insbesondere erhalten wir

<u>Kor. 5.1.1</u> (Cauchy) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und 1-zshg, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

5.2 Der komplexe Logarithmus

Auf jedem 1-zshg., offenen $\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $1 \in \Omega$ können wir einen "Zweig" des komplexen Logarithmus einführen.

Satz 5.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg und mit $1 \in \Omega$, $0 \notin \Omega$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $F(z) = \log_\Omega(z)$, $z \in \Omega$, mit

i) $e^{F(z)} = z$, $z \in \Omega$,

ii) $F(1) = 0$.

Bew.: Für $z \in \Omega$ setze

$$F(z) := \int_\gamma \frac{dz}{z},$$

wobei $\gamma \in C^1([0,1];\Omega)$ ein beliebiger Weg ist mit $\gamma(0) = 1$, $\gamma(1) = z$.

Da Ω nach Annahme 1-zshg mit $0 \notin \Omega$, ist F wohldefiniert, und wie im Beweis von Satz 3.1.1. ist F holomorph mit

$$F'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \Omega.$$

Nach Konstruktion gilt $F(1) = 0$.

Weiter gilt

$$\frac{d}{dz}\left(z e^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)}\left(1 - zF'(z)\right) = 0;$$

also

$$z e^{-F(z)} = 1 e^{-F(1)} = 1, \quad z \in \Omega.$$

$\square$

<u>Bem.</u> 5.2.1. i) Für $\Omega = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$ erhalten wir mittels Satz 5.2.1 den bereits früher eingeführten <u>Hauptzweig</u> des Logarithmus zurück.

ii) Für ein offenes 1-zshg. $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $1 \in \Omega$ und ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ können wir nun die <u>allgemeine</u> <u>Potenz</u>

$$z^\alpha := \exp\left(\alpha \log_\Omega(z)\right), \quad z \in \Omega,$$

einführen. Diese ist jedoch stets abhängig vom gewählten Gebiet Ω.

iii) <u>Vorsicht</u> ist jedoch <u>geboten</u> bei der Anwendung der üblichen Rechenregeln!

z.B. gilt für den Hauptzweig des Logarithmus bei Wahl von $z_1 = z_2 = e^{2\pi i/3}$, $z_1 z_2 = e^{4\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$ nach Definition

$$\log(z_1 z_2) = -2\pi i/3 \neq \log(z_1) + \log(z_2) = 4\pi i/3$$

Somit gilt auch

$$(z_1 z_2)^i = \exp\left(i \log(z_1 z_2)\right) = e^{2\pi/3},$$

während $\quad z_1^i = \exp(i \log z_1) = e^{-2\pi/3}$

also $\quad z_1^i \cdot z_2^i = e^{-4\pi/3} \neq (z_1 z_2)^i.$

Satz 5.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg, $f: \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Dann gibt es $g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$e^{g(z)} = f(z), \quad z \in \Omega.$$

Bem. 5.2.2. g ist eindeutig bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt und definiert einen Zweig der Funktion $\log(f(z))$, $z \in \Omega$.

Bew. von Satz 5.2.2: Fixiere $z_0 \in \Omega$. Für $z \in \Omega$ setze

$$g(z) := \int_\gamma \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}}_{\text{"}= (\log f)'(z)\text{"}} dz + c_0$$

wobei $\gamma \in C^1_{pw}([0,1], \Omega)$ eine beliebige Kurve ist von $\gamma(0) = z_0$ nach $\gamma(1) = z$, und mit zu bestimmendem $c_0 \in \mathbb{C}$.

Wie im Beweis von Satz 3.1.1 ist $g : \Omega \to \mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph mit

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega,$$

so daß

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = e^{-g(z)}\underbrace{\left(f'(z) - f(z)g'(z)\right)}_{=0} = 0.$$

Es folgt

$$f(z)e^{-g(z)} = f(z_0)e^{-c_0}, \quad z \in \Omega.$$

Wähle $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{c_0} = f(z_0)$! $\square$

5.3 Ganze Funktionen

Gibt es eine Beziehung zwischen den Nullstellen einer holomorphen Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ihrem Verhalten für $|z| \to \infty$? Kann man f aus seinen Nullstellen wie ein Polynom durch Zerlegung in Linearfaktoren (bis auf einen Faktor in $\mathbb{C}$) rekonstruieren?

Satz 5.3.1 (Jensen) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \overline{B} \subset \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial B$, $f(0) \neq 0$. Dann gilt

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta,$$

wobei $z_1, \ldots, z_K$ die Nullstellen von f in B bezeichnet und jede Nullstelle entsprechend ihrer Multiplizität n_k-mal in der Aufzählung erscheint.

Eine wichtige Rolle beim Beweis spielt der Cauchy'sche Darstellungssatz in der folgenden Form.

<u>Satz</u> 5.3.2 (Mittelwerteigenschaft)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \overline{B} \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$(5.3.1) \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Falls weiter $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$, so gilt

$$(5.3.2) \quad u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\, d\theta.$$

<u>Bew.</u>: Nach Satz 3.4.1 gilt mit $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, dt,$$

also (5.3.1). Die Formel (5.3.2) folgt nach Übergang zum Realteil in (5.3.1). $\square$

Weiter benötigen wir das folgende Lemma.

<u>Lemma</u> 5.3.1. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| \, d\theta = 0.$$

<u>Bew.</u>: Die Funktion $f(z) = 1 - az$, $z \in \mathbb{C}$, ist holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$. Also gibt es $R > 1$ mit $f(z) \neq 0$, $z \in B_R(0)$. Nach Satz 5.2.2 gibt es $g: B_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = e^{g(z)}$, $z \in B_R(0)$, und

$$\log |f(z)| = \log \left(e^{\operatorname{Re}(g(z))} \right) = \operatorname{Re}(g(z)).$$

Mit (5.3.2) folgt

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - a e^{i\theta}| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(g(e^{i\theta})\right) d\theta = 2\pi \operatorname{Re}(g(0))$$

$$= 2\pi \log \underbrace{|f(0)|}_{=1} = 0.$$

$\square$

Bew. von Satz 5.3.1: Wir beweisen den Satz in 4 Schritten.

i) Nimm an, der Satz gilt für f_1 und f_2. Da $f = f_1 f_2$ genau dort verschwindet, wo entweder f_1 oder f_2 verschwindet, und da

$$\log|f_1 f_2| = \log|f_1| + \log|f_2|$$

für den reellen Logarithmus, folgt die Aussage für $f = f_1 f_2$.

ii) Falls $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{B}$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet, so hat die holomorphe Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}, \quad z \in U \setminus \{z_1, \dots, z_k\},$$

wo $U \subset \Omega$ eine offene Umgebung von $\mathbb{B}$, hebbare Singularitäten bei $z_1, \dots, z_k$; also

$$f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_k)\, g(z)$$

mit holomorphem $g : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

iii) OBdA dürfen wir annehmen, daß $\mathcal{U}$ 1-zshg. Nach Satz 5.2.2 gibt es $h: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g = e^h$; insbesondere gilt

$$|g(z)| = e^{\mathrm{Re}(h(z))}, \quad z \in \mathcal{U},$$

und mit (5.3.2) folgt

$$\log|g(0)| = \mathrm{Re}(h(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(h(Re^{i\theta}))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|g(Re^{i\theta})|\, d\theta .$$

iv) Fixiere $1 \leq k \leq K$. Für $f_k(z) = z - z_k$, $z \in \mathbb{C}$, gilt nach Lemma 5.3.1

$$\int_0^{2\pi} \log|f_k(Re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \log|Re^{i\theta} - z_k|\, d\theta$$

$$= 2\pi \log R + \int_0^{2\pi} \log\Big|e^{i\theta} - \underbrace{\frac{z_k}{R}}_{=: a \in B_1(0)}\Big|\, d\theta$$

$$\overset{(t=-\theta)}{=} 2\pi \log R - \underbrace{\int_0^{2\pi} \log|1 - ae^{it}|\, dt}_{=0} = 2\pi \log R .$$

Es folgt

$$\log|f_k(0)| = \log|z_k| =$$

$$= \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \log R$$

$$= \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_k(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Mit i) – iii) liefert dies die Aussage des Satzes. $\square$

Für holomorphes $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $r>0$ sei

$$n(r) = n_f(r) = \#\{z \in B_r(0);\ f(z)=0\},$$

wobei jede Nullstelle mit ihrer Multiplizität gezählt wird.

Lemma 5.3.2. Für $R > 0$ gilt

$$\int_0^R n(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right),$$

falls $f(0) \neq 0$, wobei $z_1, \ldots, z_K \in B_R(0)$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet.

Bew.: Für $1 \leq k \leq K$ gilt

$$\int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right).$$

Mit $\chi_k(r) = \begin{cases} 1, & r > |z_k| \\ 0, & r \leq |z_k| \end{cases}$, $1 \leq k \leq K$,

folgt $n(r) = \sum_{k=1}^{K} \chi_k(r)$, $0 < r < R$, also

$$\int_0^R n(r)\,\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \int_0^R \chi_k(r)\,\frac{dr}{r}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right).$$

$\square$

Def. 5.3.1: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\rho > 0$.

i) Die Funktion f hat Wachstumsordnung $\leq \rho$, falls gilt

$$\exists A, B > 0 \ \forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq A \exp(B|z|^\rho).$$

ii) Die Ordnung des Wachstums von f ist dann

$$\rho_f := \inf\{\rho > 0;\ f \text{ hat Wachstumsordnung } \leq \rho\}.$$

Beisp. 5.3.1. Für $f(z) = e^{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, gilt $\rho_f = 2$.

Satz 5.3.3. Sei f ganz mit $\rho_f < \rho$. Dann gilt

i) $\exists C > 0 \quad \forall r > 1 : n(r) \leq C r^\rho$.

ii) Sind $z_1, z_2, \ldots$ die Nullstellen $z_k \neq 0$ von f mit Multiplizität, so gilt für jedes $s > \rho$, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty.$$

Bew.: i) OBdA dürfen wir annehmen, daß $f(0) \neq 0$. Betrachte sonst die holomorphe Funktion $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(z)/z^{n_0}$, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ ist, mit $\rho_g \leq \rho_f$. Mit $n_g(r) \leq C r^\rho$ folgt dann auch i) für f.

Mit Lemma 5.3.2 und Satz 5.3.1 erhalten wir für ganzes f mit $f(0) \neq 0$ für $R>0$ mit $f(z) \neq 0$ für $|z|=R$ die Identität

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|$$

$$= -\sum_{k=1}^{K} \log\left|\frac{z_k}{R}\right| = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{R}{|z_k|}\right) = \int_0^R n(s)\,\frac{ds}{s}.$$

Da $n(s) \geq 0$, folgt für $R=2r$ somit

$$\int_r^{2r} n(s)\,\frac{ds}{s} \leq \int_0^{2r} n(s)\,\frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|,$$

und

$$\int_r^{2r} n(s)\,\frac{ds}{s} \geq n(r)\int_r^{2r} \frac{ds}{s} = \log 2 \cdot n(r),$$

da $n(r)$ nicht fallend.

Die Wachstumsannahme $\rho_f < \rho$ ergibt andererseits

$$\log|f(Re^{i\theta})| \leq \log\left(A\exp(BR^{\rho})\right) \leq CR^{\rho}, \quad 0\leq\theta\leq 2\pi,$$

für genügend großes $R \geq R_0 \geq 2$. Mit $R=2r$ folgt

$$n(r) \leq C r^{\rho}, \quad r \geq r_0 \geq 1.$$

ii) Da es wegen Kor. 3.4.2 höchstens endlich viele Nullstellen z_k mit $|z_k| \leq 1$ gibt, genügt es, $\sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s}$ abzuschätzen. Dies gelingt mit i) mittels dyadischer Zerlegung

$$\sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{2^j \leq |z_k| < 2^{j+1}} |z_k|^{-s} \Big)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-sj} \underbrace{n(2^{j+1})}_{\overset{i)}{\leq} C\, 2^{(j+1)\rho}} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\rho - s)j} < \infty,$$

da $2^{\rho - s} < 1$ für $s > \rho$. $\square$

<u>Beisp.</u> 5.3.2. Die ganze Funktion

$$f(z) = \sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C},$$

hat Ordnung $\rho_f = 1$ und einfache Nullstellen genau bei $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Da $\sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |z_k|^{-s} = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^s} < \infty$

genau dann gilt, wenn $s > 1$, sieht man, daß die Aussage von Satz 5.3.3. ii) nicht verbessert werden kann.

Eine erste Anwendung des Begriffs der Ordnung des Wachstums einer ganzen Funktion f ist die folgende Verallgemeinerung des Maximumsprinzips für gewisse unbeschränkte Gebiete.

<u>Satz</u> 5.3.4 (Phragmén-Lindelöf)

Sei
$$S = \{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C};\ r > 0,\ |\theta| < \tfrac{\pi}{4} \},$$
und sei $f \in C^0(\bar{S}, \mathbb{C})$ holomorph in S mit $\rho_f \leq 1$ und mit
$$|f(z)| \leq 1 \quad , \quad z \in \partial S.$$
Dann gilt $|f(z)| \leq 1$ für jedes $z \in S$.

<u>Bem.</u> 5.3.1. Die Bedingung $\rho_f \leq 1$ ist notwendig, wie das Beispiel der Funktion $f(z) = e^{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$, zeigt. Es gilt
$$z^2 = r^2 e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = \pm i r^2 \quad \text{für } z = re^{\pm i \pi/4} \in \partial S;$$
also $|f(z)| = 1$ für $z \in \partial S$; jedoch gilt
$$e^{x^2} \longrightarrow \infty \quad (x \to \infty,\ x \in \mathbb{R}).$$
Siehe auch Übung

<u>Bew.</u> <u>von</u> <u>Satz</u> 5.3.4: Fixiere $1 < \alpha < 2$ und für $0 < \varepsilon < 1$ betrachte die Funktion

$$f_\varepsilon(z) = f(z)\, e^{-\varepsilon z^\alpha}, \quad z \in \overline{S},$$

wobei $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$ wie oben definiert mit dem Hauptzweig des Logarithmus.

Für $z = re^{i\theta}$, $|\theta| \leq \pi/4$, gilt dann

$$Re(z^\alpha) = r^\alpha \cos(\alpha\theta) \geq r^\alpha \cos(\alpha\pi/4)$$

mit $\cos(\alpha\pi/4) =: \beta > 0$. Da $\rho_f \leq 1$ folgt mit Konstanten $A, B > 0$ für $z \in S$:

$$|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)|\, e^{-\varepsilon\beta|z|^\alpha} \leq A\, e^{B|z|^{\frac{1+\alpha}{2}} - \varepsilon\beta|z|^\alpha} \underset{(|z| \to \infty)}{\longrightarrow} 0,$$

und es existiert $0 < R_\varepsilon \to \infty$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ mit

$$|f_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \text{für } z \in \partial(S \cap B_{R_\varepsilon}(0)).$$

Da $f_\varepsilon \in C^0(\overline{S \cap B_{R_\varepsilon}(0)})$ holomorph in S, ergibt das Maximumprinzip für jedes $z_0 \in S$

$$1 \geq \sup_{z \in S \cap B_{R_\varepsilon}(0)} |f_\varepsilon(z)| \geq |f_\varepsilon(z_0)| = |f(z_0)|\,|e^{-\varepsilon z_0^\alpha}|,$$

falls $\varepsilon > 0$ genügend klein, so daß $|z_0| < R_\varepsilon$. Da $z_0 \in S$ beliebig, folgt mit $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung.

$\square$

Ganze Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen kann man z.B. durch Produktdarstellungen gewinnen.

__Def.__ 5.3.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

__konvergiert__, falls $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1+a_n) =: A$ existiert, und $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) := A$.[1]

__Lemma__ 5.3.3. Es gelte $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Dann konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, und

$$A := \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Weiter ist $A = 0$ gdw. $1+a_{n_0} = 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

__Bew.:__ Mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ folgt die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| < \frac{1}{2}.$$

---

[1] Vgl. Shakarchi-Stein, S. 140.

i) Zunächst wollen wir annehmen $n_0 = 1$, und der Hauptzweig des Logarithmus ist für alle Terme $1+a_n$ definiert mit

$$1 + a_n = \exp\Big(\log(1+a_n)\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ folgt

$$\prod_{n=1}^{N} (1+a_n) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{N} \log(1+a_n)\Big),$$

wobei

$$\log(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \dots$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a_n)^k}{k} \quad ;$$

also für $|a_n| \leq \frac{1}{2}$

$$\big|\log(1+a_n)\big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^k = \frac{|a_n|}{1-|a_n|} \leq 2|a_n|.$$

Mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ folgt somit, daß die Reihe

$$B := \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$$

absolut konvergiert, unabhängig von der Summationsreihenfolge, und $\prod_{n=1}^{N} (1+a_n) \xrightarrow{(N\to\infty)} e^{B} =: \prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$.

Insbesondere ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = e^B \neq 0$.

ii) Falls allgemein $n_0 \in \mathbb{N}$, so existiert weiterhin $\prod_{n=n_0}^{\infty}(1+a_n) =: A_0$ und damit auch

$$A = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = A_0 \prod_{n=1}^{n_0-1}(1+a_n),$$

und

$$A = 0 \iff \exists\, 1 \leq n \leq n_0 : 1 + a_n = 0.$$

$\square$

<u>Satz</u> 5.3.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\forall z \in \Omega : |f_n(z) - 1| \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

für $c_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Dann konvergiert $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, und $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

Zudem gilt für $z \in \Omega$ mit $f_n(z) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} .$$

Bew.: i) Schreibe $f_n(z) = 1 + a_n(z)$

mit $|a_n(z)| \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega$.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n \geq n_0} c_n \leq \frac{1}{2}$,

und für $N \geq L \geq n_0$ schreibe $F_N(z) = \prod_{n=1}^{N} f_n(z)$,

$$F_N(z) - F_L(z) = \left(\prod_{n=L+1}^{N} f_n(z) - 1 \right) F_L(z) .$$

Gemäß Lemma 5.3.3 existiert

$$F(z) = \lim_{L \to \infty} F_L(z), \quad z \in \Omega,$$

und

$$|F(z)|, |F_L(z)| \leq \prod_{n=1}^{n_0} (1 + c_n) \exp\left(2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n\right) =: C_0,$$

gleichmäßig in $z \in \Omega$, $L \in \mathbb{N}$; zudem ist F unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Weiter gilt analog zum Beweis von Lemma 5.3.3

$$|F_N(z) - F_L(z)| \leq C_0 \left| \prod_{n=L+1}^{N} f_n(z) - 1 \right|$$

$$= C_0 \left| \prod_{n=L+1}^{N} (1 + a_n(z)) - 1 \right|$$

$$= C_0 \left| \exp\left(\sum_{n=L+1}^{N} \log (1 + a_n(z)) \right) - 1 \right|$$

$$\leq C_0 \left| \exp\left(2 \underbrace{\sum_{n=L+1}^{N} c_n}_{\leq 1} \right) - 1 \right|$$

(Mittelwertsatz)

$$\leq 2e\, C_0 \sum_{n>L} c_n \longrightarrow 0 \quad (N \geq L \to \infty),$$

gleichmäßig in $z \in \Omega$.

Nach Kor. 3.4.6 von Weierstrass ist F holomorph in Ω, und $F_N' \xrightarrow{(N\to\infty)} F'$ lokal glm.

ii) Falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $f_n(z_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so ergibt Stetigkeit von f_n, $n \in \mathbb{N}$, zusammen mit $|f_n - 1| \leq c_n < \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$, daß für ein $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und ein $c > 0$ gilt

$|f_n(z)| \geq c > 0$ für alle $z \in \overline{B_R(z_0)}$. Mit Lemma 5.3.3 folgt dann auch $F(z) \neq 0$, $z \in \overline{B_R(z_0)}$.

Lokal gleichmäßige Konvergenz

$F_N \to F$, $F_N' \to F'$ $(N \to \infty)$ ergibt mit Stetigkeit von F dann auch $|F(z)| \geq c_1 > 0$, $z \in \overline{B_R(z_0)}$, und

$$\frac{F_N'(z)}{F_N(z)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \xrightarrow{(N\to\infty)} \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

lokal gleichmäßig in $B_R(z_0)$.

Beachte, daß mit

$$|f_n(z)| \geq c > 0 \quad \text{in } \overline{B_R(z_0)}$$

und der Abschätzung für jedes $0 < r < R$

$$|f_n'(z)| = |(f_n - 1)'(z)| \leq \frac{\max_{\overline{B_R(z_0)}} |f_n - 1|}{R - |z|} \leq \frac{c_n}{R - r}, \quad z \in B_r(z_0),$$

gemäß der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1.i), auch die Reihe

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}, \quad z \in B_R(z_0),$$

lokal gleichmäßig absolut konvergiert. $\square$

Beisp. 5.3.3. Wir zeigen Eulers Produktformel

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beachte, daß für jedes $z \in \mathbb{C}$ für $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$ gilt

$$|f_n(z) - 1| \leq c_n = \frac{|z|^2}{n^2}, \quad \sum_{n \neq 0} c_n < \infty.$$

Den Beweis führen wir in 3 Schritten.

Beh. 1. Die Funktion $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ erfüllt

$$-\pi \frac{d}{dz} \cot(\pi z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Bew.: Die Funktion

$$g(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \notin \mathbb{Z},$$

hat wegen $\sin(\pi z) = \pm \sin(\pi(z-n))$ und

$$(z-n)\, g(z) = \frac{\pi^2 (z-n)^3 - (z-n)\left(\pi(z-n) + O((z-n)^3)\right)^2}{\sin^2(\pi(z-n))(z-n)^2} + O(z-n)$$

$$= O(z-n) \longrightarrow 0 \quad (z \to n, \; n \in \mathbb{Z})$$

hebbare Singularitäten bei $z \in \mathbb{Z}$.

Zudem gilt $g(z) = g(z+1)$, $z \in \mathbb{C}$,

und $|g(z)| \leq C$ für $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$, da g stetig.

Weiter gilt für $|\operatorname{Im}(z)| \to \infty$ sowohl

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_{n \geq 2|z|}^{\infty} \frac{4}{n^2} + \frac{4|z|}{|\operatorname{Im} z|^2} \to 0$$

als auch

$$|\sin(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \to \infty ;$$

also $|g(z)| \leq C$, gleichmäßig in $z \in \mathbb{C}$.

Mit Kor. 3.4.4 (Liouville) folgt

$$g \equiv \text{const.} = \lim_{|\operatorname{Im}(z)| \to \infty} g(z) = 0 .$$

$\square$

Beh. 2: Für $z \notin \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Beachte dabei, daß

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \leq \frac{2|z|}{n^2}, \quad |n| \geq 2|z|,$$

so daß die Summe absolut konvergiert für $z \notin \mathbb{Z}$ und folglich können wir die Summe umordnen und erhalten

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{-n} \right) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Bew. von Beh. 2: Gemäß Beh. 1 gilt für

$$h(z) := \pi \cot(\pi z) - \left(\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right)$$

die Gleichung

$$\frac{d}{dz} h(z) = \pi \frac{d}{dz} \cot(\pi z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = 0;$$

also wegen $h(z) = -h(-z)$, $z \notin \mathbb{Z}$, $h(z) \equiv \text{const.} = 0$.

$\square$

Betrachte nun

$$G(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}, \quad P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

mit

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z), \quad z \notin \mathbb{Z},$$

und mit (gemäß Satz 5.3.5)

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z) = \frac{G'(z)}{G(z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Es folgt für $z \notin \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$\left(\frac{P(z)}{G(z)}\right)' = \frac{P'(z)\,G(z) - G'(z)\,P(z)}{G^2(z)} = \frac{P(z)}{G(z)} \underbrace{\left(\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{G'(z)}{G(z)}\right)}_{=0} = 0,$$

und

$$P(z) = c\, G(z)$$

mit

$$c = \lim_{z \to 0} \frac{P(z)}{G(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = 1.$$

Ohne Beweis geben wir noch die folgende Darstellung ganzer Funktionen analog zur Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren an.

<u>Def</u>. 5.3.3. Für $k \in \mathbb{N}$ heißt

$$E_k(z) = (1-z)\, e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^k}{k}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

der <u>kanonische</u> <u>Faktor</u> vom Grad k. Setze weiter

$$E_0(z) = 1 - z.$$

<u>Satz</u> 5.3.6 (Hadamard) Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\rho_f < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq \rho_f < k+1$. Seien $z_1, z_2, \dots$ die Nullstellen $z_n \neq 0$ von f. Dann gibt es ein Polynom p vom Grad $\leq k$, so daß

$$f(z) = e^{p(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/z_n), \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$, falls $f(0) = 0$, und $m = 0$ falls $f(0) \neq 0$.

<u>Bew.</u>: Siehe z.B. Shakarchi-Stein, S.147 ff.

5.4 Die Gamma-Funktion

Für $s > 0$ gilt gemäß der klassischen Definition

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt. \qquad (5.4.1)$$

Indem wir allgemein $t^s = \exp(s \cdot \log t)$ setzen, können wir Γ holomorph auf die rechte Halbebene erweitern.

Satz 5.4.1. Durch (5.4.1) wird eine holomorphe Funktion Γ für $\mathrm{Re}(s) > 0$ erklärt.

Bew.: Schreibe $\Gamma(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Gamma_\varepsilon(s)$ mit

$$\Gamma_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Da $s \mapsto t^s = \exp(s \log t)$ holomorph, ist $\Gamma_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ebenfalls holomorph.

Mit

$$|e^{-t} t^{s-1}| = e^{-t} t^{\mathrm{Re}(s)-1}, \quad t > 0$$

folgt zudem lokal gleichmäßige Konvergenz

$$\Gamma_\varepsilon(s) \to \Gamma \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Mit Kor. 3.4.6 erhalten wir auch Konvergenz in C^1_{loc}, und Γ ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$. $\square$

Wir können Γ zu einer meromorphen Funktion $\Gamma : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ fortsetzen mit Hilfe der folgenden Beobachtung.

<u>Lemma</u> 5.4.1. Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s);$$

insbesondere erhalten wir so $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Bew.</u>: Für $\varepsilon > 0$ integriere partiell

$$\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s}\, dt = -\left(e^{-t} t^{s}\right)\Big|_{t=\varepsilon}^{1/\varepsilon} + s \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-t} t^{s-1}\, dt \,,$$

Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ ergibt die behauptete Identität.

Mit

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

erhalten wir daraus auch für $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = \ldots = n!\,\Gamma(1) = n!$$

$\square$

Motiviert durch Lemma 5.4.1 definieren wir

$$F_1(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1.$$

Dann ist F_1 eine in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > -1$ meromorphe Funktion mit einem einfachen Pol bei $s = 0$ und

$$\mathrm{res}_{s=0} F_1 = \lim_{\substack{s \to 0 \\ s \neq 0}} s F_1(s) = \Gamma(1) = 1.$$

Da zudem für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt $F_1(s) = \Gamma(s)$, können wir Γ durch F_1 für $\mathrm{Re}(s) > -1$ meromorph fortsetzen.

Iterieren wir dieses Verfahren, so erhalten wir die meromorphe Funktion

$$F_2(s) = \frac{F_1(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}, \quad \mathrm{Re}(s) > -2,$$

mit einfachen Polstellen bei $s = 0$ und $s = -1$, und allgemein für $m \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$F_m(s) = \frac{F_{m-1}(s+1)}{s} = \ldots = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}, \quad \mathrm{Re}(s) > -m,$$

mit einfachen Polstellen bei $s = 0, -1, \ldots, 1-m$, welche Γ meromorph auf die Halbebene $\mathrm{Re}(s) > -m$

fortsetzt, mit Residuen

$$\operatorname{res}_{s=-k} F_m = \lim_{\substack{s\to -k\\ s\neq -k}} (s+k)\frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)\cdots s}$$

$$= \frac{\Gamma(m-k)}{(m-k-1)!\,(-1)(-2)\cdots(-k)} = {}^{m}$$

$$= \frac{(m-k-1)!\,(-1)^k}{(m-k-1)!\,k!} = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad 1\leq k<m.$$

Im allgemeinen kann man $\Gamma(s)$ für $s\notin \mathbb{N}$ nicht explizit bestimmen. Der folgende Satz erlaubt jedoch die Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Satz 5.4.2. Es gilt für jedes $s\in\mathbb{C}$ die Identität

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Kor. 5.4.1. Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Bew.: $\Gamma(\frac{1}{2})>0$ erfüllt $\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$ nach Satz 5.4.2. $\square$

Für den Beweis von Satz 5.4.2 benötigen wir ein Lemma.

<u>Lemma</u> 5.4.2. Für $0 < a < 1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{r^{a-1}}{1+r}\,dr = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

<u>Bew.</u>: Substituieren wir $r = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{1+r}\,\frac{dr}{r} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

gemäß Beisp. 4.1.3. $\square$

<u>Bew. von Satz</u> 5.4.2: Da $\Gamma(s)$ einfache Pole bei $s = 0, -1, -2, \ldots$ besitzt und $\Gamma(1-s)$ einfache Pole bei $s \in \mathbb{N}$, besitzt ihr Produkt $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ ebenso wie $\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ einen einfachen Pol bei jedem $s \in \mathbb{Z}$ und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Wegen der Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung genügt es daher, die Aussage für $0 < s < 1$ zu zeigen.

Beachte zunächst, daß für $0<s<1$ gilt

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{-s}\,d\tau \overset{(\tau = rt)}{=} t\int_0^\infty e^{-rt}(rt)^{-s}\,dr,$$

wobei $t>0$ beliebig.

Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini erhalten wir dann

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\Gamma(1-s)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\left(t\int_0^\infty e^{-rt}(rt)^{-s}\,dr\right)dt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(1+r)t}\,r^{-s}\,dr\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{r^{-s}}{1+r}\,dr \overset{(-s=a-1)}{=} \frac{\pi}{\sin(\pi(1-s))} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 5.4.2 benutzen und beachten, daß mit $0<s<1$ auch gilt $0<a=1-s<1$.

$\square$

5.5 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Für reelles $s > 1$ konvergiert die Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Wegen

$$|n^s| = |\exp(s \log(n))|$$
$$= \exp(\operatorname{Re}(s) \log(n)) = n^{\operatorname{Re}(s)}$$

konvergiert $\zeta(s)$ auch für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$, und $s \mapsto \zeta(s)$ ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Der folgende Satz zeigt eine enge Verbindung zwischen der ζ-Funktion und den Primzahlen.

Satz 5.5.1 (Euler) Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - (1/p)^s}.$$

Bew.: Es genügt, die Identität für reelle $s > 1$ zu zeigen. Die Aussage für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ folgt dann aus der Analytizität der beiden Funktionsausdrücke.

Beachte, daß für jede Primzahl $p > 1$ und für jedes $s > 1$ gilt

$$\frac{1}{1-(1/p)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^{sm} .$$

Weiter besitzt jedes $n \in \mathbb{N}$ gemäß dem Hauptsatz der Arithmetik eine eindeutige Produktzerlegung

$$n = p_1^{s_1} \cdots p_K^{s_K} ,$$

wo p_k prim, $s_k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq K$.

Für jedes $N = 2^M \in \mathbb{N}$ erhalten wir so die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{sM}}\right)$$

$$\leq \prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right) \leq \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right) ,$$

und Grenzübergang $N \to \infty$ ergibt

$$\zeta(s) \leq \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^s}\right) .$$

Umgekehrt gilt für jedes Paar $M, N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{sM}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) .$$

Nach Grenzübergang $M \to \infty$ folgt

$$\prod_{\substack{p \leq N \\ p \text{ prim}}} \left(\frac{1}{1 - (1/p)^s}\right) \leq \zeta(s) .$$

Grenzübergang $N \to \infty$ schließlich ergibt

$$\prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1 - (1/p)^s}\right) \leq \zeta(s)$$

und damit die Behauptung. $\square$

Ähnlich zum Verfahren zur Fortsetzung von Γ kann man auch ζ zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortsetzen.

Analog zu Satz 5.4.2 gilt dann die fundamentale Beziehung

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s), \quad s \in \mathbb{C};$$

vgl. Salamon (4.69).

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < 0$ gilt:

i) $\mathrm{Re}(1-s) > 1$; also $\zeta(1-s) = \prod_{p \text{ prim}} \left(\frac{1}{1-(1/p)^{1-s}}\right) \neq 0$ gemäß Lemma 5.3.3;

ii) $\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)\, \Gamma(s)} \neq 0$,

da $\Gamma(s) \cdot \sin(\pi s)$ für $\mathrm{Re}(s) < 1$ nur hebbare Singularitäten bei $s \in -\mathbb{N}_0$ besitzt;

iii) $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$ gdw. $s/2 \in -\mathbb{N}$.

Also gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) < 0$ außer an den "trivialen" Nullstellen $s \in -2\mathbb{N}$, und $\zeta(s) \neq 0$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ nach Lemma 5.3.3.

Folge: Außer den "trivialen" Nullstellen $s \in -2\mathbb{N}_0$ liegen alle Nullstellen von ζ im "kritischen Streifen" $0 \leq Re(s) \leq 1$.

Riemannsche Vermutung: Alle Nullstellen s von ζ mit $0 \leq Re(s) \leq 1$ haben $Re(s) = 1/2$.

Bem. 5.5.1. Hadamard hat gezeigt, daß $\zeta(s) \neq 0$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) = 1$, und damit bewiesen, daß gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

wobei

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N}, p \text{ prim}, p \leq x\}.$$

6. Der Riemannsche Abbildungssatz

6.1 Beispiele

Für viele Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ gibt es biholomorphe Abbildungen $f : \Omega \to \tilde{\Omega}$.

Beisp. 6.1.1. Die holomorphe Funktion

$$F(z) = \frac{i-z}{i+z}, \quad z = x+iy, \; y > 0,$$

bildet die obere Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z = x+iy;\; y > 0\}$$

biholomorph ab auf den Einheitsball

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\; |z| < 1\} = B_1(0)$$

mit

$$F^{-1}(w) = G(w) = i\,\frac{1-w}{1+w}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Bew.: Es gilt

$$|F(x+iy)|^2 = \frac{|i(1-y)-x|^2}{|i(1+y)-x|^2} = \frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2} < 1$$

für $y > 0$; also $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$. Zudem gilt

$$\operatorname{Im}(G(w)) = \operatorname{Im}\left(i\,\frac{(1-w)(1+\bar{w})}{|1+w|^2}\right) = \operatorname{Im}\left(i\,\frac{1-|w|^2}{|1+w|^2}\right) > 0$$

für $w \in \mathbb{D}$; also $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$.

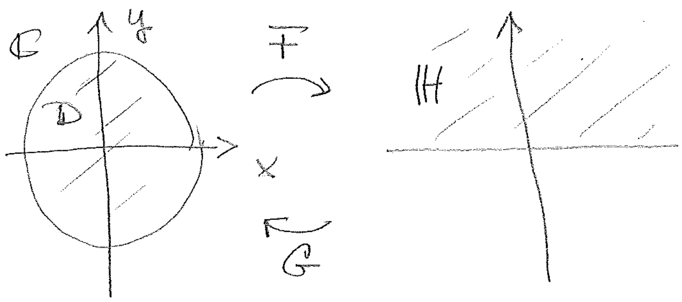
Weiter gilt

$$F\big(G(w)\big) = \frac{1 - \frac{1-w}{1+w}}{1 + \frac{1-w}{1+w}} = \frac{2w}{2} = w, \quad w \in \mathbb{D};$$

also ist F surjektiv. Ebenso erhalten wir

$$G\big(F(z)\big) = i\,\frac{1 - \frac{i-z}{i+z}}{1 + \frac{i-z}{i+z}} = \frac{2iz}{2i} = z, \quad z \in \mathbb{H};$$

und die Behauptung folgt.



<u>Beisp.</u> 6.1.2. Die holomorphe Funktion

$$F(z) = z^2, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \quad 0<r<1,$$

bildet den $\frac{1}{4}$-Kreis biholomorph ab auf den oberen Halbkreis $\mathbb{D}_+ = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{D};\ 0<\theta<\pi\}$

mit $$F^{-1}(w) = G(w) = \sqrt{w} = \exp\left(\frac{\log w}{2}\right),$$

wobei $\log$ der Hauptzweig des Logarithmus.

Beisp. 6.1.3. Wie in Kor. 3.4.9 gezeigt, sind alle biholomorphen Abbildungen $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ Möbiustransformationen der Form

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

für ein $z_0 \in \mathbb{D}$ und ein $\theta \in \mathbb{R}$.

Weiter erinnern wir an das Schwarzsche Lemma, Satz 3.4.3:

Falls $f: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorph mit $f(0) = 0$, so gilt $|f'(0)| \leq 1$, und falls $|f'(0)| = 1$, so gilt $f(z) = cz$, $z \in \mathbb{D}$, für ein $c = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Def. 6.1.1. Im folgenden nennen wir zwei Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ biholomorph, falls es eine biholomorphe Bijektion $f: \Omega \to \tilde{\Omega}$ gibt.

6.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Welche Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ sind biholomorph zu $\mathbb{D}$?

Offenbar muß gelten $\Omega \neq \mathbb{C}$, denn nach dem Satz von Liouville, Kor. 3.4.4, ist jede holomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ konstant (da $|f(z)| < 1$, $z \in \mathbb{C}$).

Da topologische Eigenschaften unter bi-stetigen Bijektionen (und daher auch unter bi-holomorphen Abbildungen) erhalten bleiben, ist eine weitere Bedingung, daß Ω 1-zshg. sein muß.

Erstaunlicherweise sind diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend.

Satz 6.2.1 (Riemann). Sei $\emptyset \neq \Omega \neq \mathbb{C}$ offen, 1-zshg., $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f: \Omega \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. (Vgl. Beisp. 6.1.3.)

Kor. 6.2.1. Je zwei offene und 1-zshg. Gebiete $\emptyset \neq \Omega, \tilde{\Omega} \neq \mathbb{C}$ sind zueinander biholomorph.

Zum Beweis von Satz 6.2.1 benötigen wir einige neue Begriffe. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Def. 6.2.1. Eine Familie

$$\mathcal{F} \subset \{f: \Omega \to \mathbb{C};\ f \text{ holomorph}\} =: \mathcal{H}(\Omega)$$

heißt i) <u>beschränkt</u>, falls gilt $\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in \Omega} |f(z)| < \infty$;

ii) <u>gleichgradig stetig</u> auf $K \subset \Omega$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{F}\ \forall x, y \in K:$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

iii) <u>normal</u>, falls jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ eine lokal[1] gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

---

[1] d.h., auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$

Weiter benötigen wir das folgende Resultat.

<u>Lemma</u> 6.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gibt es kompakte Mengen $K_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bew.</u>: Die Folge

$$K_n = \{z \in \Omega ; |z| \leq n, \ \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \geq \tfrac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

<u>Def.</u> 6.2.2 Wir nennen eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 6.2.1 eine <u>Ausschöpfung</u> von Ω.

<u>Lemma</u> 6.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω, und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \mathring{K}_n$.

<u>Bew.</u>: Wegen $K \subset \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{K}_{n+1}$ gibt es $L \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \bigcup_{l=1}^{L-1} \mathring{K}_l \subset \mathring{K}_L$. $\square$

Zudem erinnern wir an den Satz von Arzelà-Ascoli.

<u>Satz</u> 6.2.2 (Arzelà-Ascoli) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(K)$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Dann existiert eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in C^0(K)$ mit

$$f_n \to f \text{ in } C^0(K) \quad (n\to\infty, n\in\Lambda).$$

<u>Bew.</u>: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ dicht. (Wähle z.B. $\{x_k^{(n)}; 1\le k\le k_0(n), n\in\mathbb{N}\}$, wo für $n\in\mathbb{N}$ gilt $K\subset \bigcup_{k=1}^{k_0(n)} B_{1/n}(x_k^{(n)})$, $x_k^{(n)}\in K$.)

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt, gibt es $C>0$ mit

$$\forall k,n\in\mathbb{N}: |f_n(x_k)| \le \sup_{x\in K}|f_n(x)| \le C.$$

Gemäß dem Satz von Bolzano-Weierstrass existieren Teilfolgen $\mathbb{N}\supset\Lambda_1\supset\Lambda_2\supset\ldots$, so daß für $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x_k) \to a_k =: f(x_k) \quad (n\to\infty, n\in\Lambda_k).$$

Für eine Diagonalfolge Λ gilt dann

$$\forall k\in\mathbb{N}: f_n(x_k) \to f(x_k) \quad (n\to\infty, n\in\Lambda).$$

<u>Beh.</u> 1: f ist gleichmäßig stetig auf $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$.

<u>Bew.</u>: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig, gibt es $\delta > 0$ mit

$$\forall j, k \in \mathbb{N}: \ |x_j - x_k| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x_j) - f(x_k)| = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Lambda}} |f_n(x_j) - f_n(x_k)| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

Da $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ dicht, können wir f zu einer Funktion $f \in C^0(K)$ fortsetzen.

<u>Beh.</u> 2: $f_n \to f$ in $C^0(K)$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$.

<u>Bew.</u>: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dazu $\delta > 0$ wie im Beweis von Beh. 1. Endlich viele Bälle $B_\delta(x_1), \dots, B_\delta(x_J)$ überdecken K. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0: \ |f_n(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq J.$$

Zu $x \in K$ gibt es $j \in \{1, \dots, J\}$ mit $|x - x_j| < \delta$; also

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)|$$

$$< 3\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Da $x \in K$ beliebig, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 6.2.3 (Montel) Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ lokal beschränkt im Sinne, daß für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gilt

$$\exists\, C > 0 \;\forall z \in K \;\forall f \in \mathcal{F} : |f(z)| \leq C.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

Bew.: Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω wie in Lemma 6.2.1, und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Wegen Lemma 6.2.2 genügt es, $K = K_n$ zu betrachten für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beh. 1: $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig auf K_n.

Bew.: Da $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ gemäß Lemma 6.2.1 gibt es zu $z \in K_n$ ein $r = r(z) > 0$ mit $B_{3r}(z) \subset \mathring{K}_{n+1}$, und endlich viele Bälle $B_{r_j}(z_j)$, $z_j \in K$, $r_j = r(z_j)$, $1 \leq j \leq J$, überdecken K_n.

Mit der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1, i), folgt

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\max\limits_{z \in B_{r_j}(z_0)} |f(z)|}{r_j} \leq \frac{\max\limits_{z \in K_{n+1}} |f(z)|}{\min\{r_j ; 1 \leq j \leq J\}} =: C_1$$

für $z_0 \in B_{2r_j}(z_j)$, da $B_{r_j}(z_0) \subset \overline{B_{3r_j}(z_j)} \subset K_{n+1} \subset \Omega$.

gleichmäßig für $f \in \tilde{\mathcal{F}}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

Für $z, w \in K_n$ mit $|z-w| < \delta < \min\left(\{r_j; 1 \le j \le J\} \cup \{\frac{\varepsilon}{C_1}\}\right)$

wähle z_j mit $z \in B_{r_j}(z_j)$. Dann gilt $w \in B_{2r_j}(z_j)$

und

$$|f(z) - f(w)| = \left| \int_0^1 f'(w + t(z-w))(z-w)\,dt \right|$$

$$\le \max_{0 \le t \le 1} \underbrace{\left| f'(\overbrace{w + t(z-w)}^{\in B_{2r_j}(z_j)}) \right|}_{\le C_1} \cdot \underbrace{|z-w|}_{< \delta} < C_1 \delta < \varepsilon,$$

gleichmäßig für $f \in \tilde{\mathcal{F}}$. Die Beh. folgt. □

Die Behauptung des Satzes folgt nun mit Satz 6.2.2. □

Bew. von Satz 6.2.1: Der Beweis erfolgt in 3 Schritten. Sei $\emptyset \neq \Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ offen und 1-zshg.

Beh. 1: Es gibt ein offenes $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$ mit $g: \Omega \to \tilde{\Omega}$ biholomorph.

Bew.: Da $\Omega \neq \mathbb{C}$ existiert $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Da Ω 1-zshg. liefert Satz 5.2.2 $g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$e^{g(z)} = z - w_0 \, (\neq 0), \quad z \in \Omega.$$

Dann ist g injektiv: Falls nämlich $g(z_1) = g(z_2)$ für $z_1, z_2 \in \Omega$, so folgt mit

$$z_1 - w_0 = e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} = z_2 - w_0$$

sofort die Gleichheit $z_1 = z_2$.

Fixiere $z_0 \in \Omega$. Es existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall z \in \Omega: \; |g(z) - g(z_0) - 2\pi i| > \delta.$$

Andernfalls gibt es $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ mit $g(z_n) \to g(z_0) + 2\pi i \; (n \to \infty)$; also

$$z_n - w_0 = e^{g(z_n)} \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} e^{2\pi i} \cdot e^{g(z_0)} = z_0 - w_0$$

und $z_n \to z_0$, $g(z_n) \to g(z_0)$ $(n \to \infty)$. $\lightning$

Die holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\delta}{g(z) - g(z_0) - 2\pi i}, \quad z \in \Omega$$

ist dann injektiv und $|f(z)| < 1$, $z \in \Omega$.
Gemäß Kor. 4.3.2 definiert f eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega \to \tilde{\Omega} := f(\Omega) \subset \mathbb{D}$.
$\square$

Gemäß Bch. 1 können wir annehmen $\Omega = \tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$. Allenfalls nach einer geeigneten Möbiustransformation $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gilt weiter $z_0 = 0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{ f : \Omega \to \mathbb{D} ; \ f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0 \}.$$

Dann gilt $\mathcal{F} \neq \emptyset$, da $f = id \in \mathcal{F}$.
Weiter ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt mit

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Da $0 \in \Omega$, Ω offen, gibt es $R > 0$ mit

$B_R(0) \subset \Omega$, und mit der Cauchy-Ungleichung, Bem. 3.4.1, i), folgt

$$s := \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(0)| \leq \sup_{f\in\mathcal{F}} \left(\frac{\max_{|z|\leq R} |f(z)|}{R} \right) \leq \frac{1}{R} < \infty .$$

Wegen $f = id \in \mathcal{F}$ gilt zudem $s \geq 1$.

Beh. 2: Es gibt $f \in \mathcal{F}$ mit $|f'(0)| = s$.

Bew.: Wähle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $|f_n'(0)| \xrightarrow{(n\to\infty)} s$.

Gemäß dem Satz von Montel, Satz 6.2.3, gibt es eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $f_n \to f$ $(n\to\infty, n\in\Lambda)$, wo $f\in C^0(\Omega;\overline{\mathbb{D}})$.

Nach Kor. 3.4.6 von Weierstrass ist f sogar holomorph, und $f_n' \to f'$ $(n\to\infty, n\in\Lambda)$ lokal gleichmäßig; insbesondere gilt

$$|f'(0)| = \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} |f_n'(0)| = s \geq 1 > 0 .$$

Also ist f nicht konstant, und das Maximumprinzip, Kor. 3.4.7, ergibt

$$|f(z_0)| < \max_{z\in\overline{B}} |f(z)| \leq 1$$

für jedes $z_0 \in \Omega$, wo $z_0 \in B = B_r(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$.

Schließlich ist f auch injektiv, $f \in \mathcal{F}$.
Andernfalls gibt es $z_1 \neq z_2$ in Ω mit $f(z_1) = f(z_2)$. Die Funktionen

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1), \quad z \in \Omega,$$

besitzen dann genau die Nullstelle $z = z_1$, $n \in \mathbb{N}$, und $g_n \to g$ in $C^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$, wo

$$g(z) = f(z) - f(z_1), \quad z \in \Omega.$$

Da $f'(0) \neq 0$, ist auch g nicht konstant.
Die Nullstelle $z = z_2$ von g ist daher nach Kor. 3.4.3 isoliert, und für hinreichend kleines $r > 0$ folgt mit Satz 4.3.1

$$1 \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_2)} \frac{g'(z)}{g(z)} \, dz =: m.$$

Andererseits folgt mit $g_n \xrightarrow{(n \to \infty)} g$ in C^1_{loc} und Satz 4.3.1 jedoch

$$m = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_2)} \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} \, dz = 0,$$

da $g_n \neq 0$ in $B_r(z_2)$. Widerspruch! $\square$

__Beh. 3:__ $f : \Omega \to \mathbb{D}$ ist biholomorph.

__Bew.:__ Nimm widerspruchsweise an, es gibt $a \in \mathbb{D}$ mit $f(z) \neq a$, $z \in \Omega$.

Sei $\psi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ die Möbiustransformation

$$\psi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a} z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

mit $\psi_a(a) = 0$. Dann ist $\psi \circ f : \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorphe Abbildung auf die 1-zshg Menge

$$\mathcal{U} = \psi(f(\Omega)) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Gemäß Satz 5.2.2 gibt es einen Zweig $\log_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ des Logarithmus. Setze

$$g(w) = \exp\left(\frac{\log_{\mathcal{U}}(w)}{2}\right) \text{"}= w^{1/2}\text{"}, \quad w \in \mathcal{U},$$

und betrachte die holomorphe Funktion

$$F = \psi_{g(a)} \circ g \circ \psi_a \circ f : \Omega \to \mathbb{D},$$

wo

$$\psi_{g(a)}(z) = \frac{g(a) - z}{1 - \overline{g(a)}\, z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

so daß $F(0) = 0$.

Weiter ist F injektiv; also $F \in \mathcal{F}$.

Mit $h(w) = w^2 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ erhalten wir die Darstellung

$$f = \psi_a^{-1} \circ h \circ \psi_{g(a)}^{-1} \circ F =: \Phi \circ F,$$

wo

$$\Phi = \psi_a^{-1} \circ h \circ \psi_{g(a)}^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}.$$

Beachte, daß Φ holomorph ist aber <u>nicht</u> injektiv. Da weiter gilt

$$\Phi(0) = \psi_a^{-1}\Big(\underbrace{h(g(a))}_{=a}\Big) = 0,$$

liefert das Schwarzsche Lemma, Satz 3.4.3, die Abschätzung

$$|\Phi'(0)| < 1$$

und damit den Widerspruch

$$s = |f'(0)| = |\Phi'(0)|\,|F'(0)| < |F'(0)| \leq s.$$

$\square$

<u>Existenz</u>. Sei f wie oben, dazu $\theta \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß

$$c f'(0) > 0.$$

Dann ist $\tilde{f} := cf : \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorph mit $\tilde{f}(z_0) = 0$, $\tilde{f}'(z_0) > 0$, wie gewünscht. (Beachte, daß $z_0 = 0$, s.o.)

Eindeutigkeit. Seien $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorph mit

$$f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0, \quad f_1'(z_0) > 0, \quad f_2'(z_0) > 0.$$

Dann ist $f := f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph mit $f(0) = 0$ und

$$f'(0) = f_1'(z_0) / f_2'(z_0) > 0 .$$

Nach Kor. 3.4.9 gibt es $z_1 \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$, so daß

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} .$$

Mit

$$0 = f(0) = -e^{i\theta} z_1$$

folgt $z_1 = 0$, und $f(z) = e^{i\theta} z$, also

$$f'(0) = e^{i\theta} ,$$

Die Bedingung $f'(0) > 0$ liefert $e^{i\theta} = 1$ und damit $f(z) = z$, $f_1 = f_2$. $\square$

Bem. 6.2.1. i) Der von Riemann ursprünglich konzipierte Beweis benutzte einen anderen Ansatz: Falls $f: \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorph mit $f(z_0) = 0$, so gilt

$$f(z) = (z - z_0)\, g(z) \quad , \; z \in \Omega,$$

mit einer holomorphen Funktion $g: \Omega \to \mathbb{C}$, wobei $g(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, da f injektiv.

Gemäß Satz 5.2.2 gibt es eine holomorphe Funktion $G: \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = e^{G(z)} \quad , \; z \in \Omega .$$

Falls wir annehmen, daß $f, g \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, so erhalten wir zusätzlich die Randbedingung

$$|f(z)| = |z - z_0| \exp\big(\mathrm{Re}(G(z))\big) = 1, \quad z \in \partial\Omega,$$

und $u := \mathrm{Re}(G)$ löst das Randwertproblem

$$(6.2.1) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$(6.2.2) \quad u(z) = \log\left(1/|z - z_0|\right), \quad z \in \partial\Omega ;$$

vgl. Abschnitt 2.5.

Riemann schlägt vor, das Dirichlet-Problem (6.2.1)-(6.2.2) mit Hilfe des "Dirichletschen Prinzips" zu lösen. Bestimmt man dann noch eine zur Lösung u konjugierte harmonische Funktion v wie in Abschnitt 2.5, so hat man einen Ansatz für G und damit für f gefunden.

Es bleibt jedoch zu zeigen, daß das so konstruierte f injektiv und damit biholomorph ist.

ii) Der hier vorgestellte Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes geht zurück auf P. Koebe (1914).

iii) Der Riemannsche Abbildungssatz läßt sich verallgemeinern zum von Felix Klein, Paul Koebe und Henri Poincaré bewiesenen Uniformisierungssatz für Riemannsche Flächen.