

FORMELSAMMLUNG

Satz 2.2.1 (Cauchy-Riemann Gleichungen). Sei $f = u + iv: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ reell differenzierbar. Dann ist f am Punkt z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn gilt

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Satz 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ sind äquivalent:

- i) $\exists F \in C^1(\Omega; \mathbb{C}): F$ holomorph, $F' = f$;
- ii) $\int_\gamma f(z) dz$ ist für jedes $\gamma \in C_{pw}^1([0, 1]; \Omega)$ nur abhängig von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$;
- iii) $\int_\gamma f(z) dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \in C_{pw}^1([0, 1]; \Omega)$.

Satz 3.3.2 (Cauchy). Sei $\Omega := B_R(z_*) \subset \mathbb{C}$ und $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C_{pw}^1([0, 1]; \Omega)$:

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Satz 3.4.1 (Cauchy Integralformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, und sei $B \subset \bar{B} \subset \Omega$ eine Kreisscheibe. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für alle } z \in B.$$

Korollar 3.4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f glatt; insbesondere ist f holomorph. Genauer gilt:

- i) f ist im Innern jedes Balles $B := B_R(z_0) \subset \bar{B} \subset \Omega$ beliebig oft komplex differenzierbar mit

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für alle } z \in B \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

- ii) f lässt sich lokal um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ durch seine Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

darstellen.

Bemerkung 3.4.1 (Cauchy-Ungleichungen). Sei Ω offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Für jedes $z_0 \in \Omega$ und jedes $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \max_{\partial B_R(z_0)} |f|}{R^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Korollar 3.4.6 (Weierstrass). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1(\Omega; \mathbb{C})$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ in $C_{\text{loc}}^0(\Omega; \mathbb{C})$; d.h., für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gelte

$$\sup_{z \in K} |f_k(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dann ist f holomorph und $f_k^{(n)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f^{(n)}$ in $C_{\text{loc}}^0(\Omega; \mathbb{C})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 3.4.7 (Maximumsprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und sei $f \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$ analytisch in Ω . Dann gilt

$$M := \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial \Omega} |f(z)|$$

und falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $|f(z_0)| = M$, so ist $f \equiv f(z_0)$.

Satz 3.4.3 (Das Schwarzsche Lemma). Sei $B = B_1(0)$ und sei $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in B$. Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in B.$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B$, so ist $f(z) = cz$ linear für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Satz 4.1.2 (Residuensatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $Z := \{z_1, \dots, z_K\} \subset \Omega$ und $f: \Omega \setminus Z \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen bei $z_k, 1 \leq k \leq K$. Dann gilt für jeden Kreis $B := B_R(z_0)$ für $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und mit $\partial B_R(z_0) \subset \Omega \setminus Z$ die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} f(z) dz = \sum_{z_k \in B_R(z_0)} \text{Res}_{z_k} f.$$

Satz 4.3.1 (Argumentprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph, und sei U beschränkt mit $\overline{U} \subset \Omega$ so, dass f weder Polstellen noch Nullstellen auf ∂U besitzt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_k \in U} n_k - \sum_{z_j \in U} m_j,$$

wobei z_k die Nullstellen von f mit Ordnung $n_k \in \mathbb{N}$ und z_j die Polstellen von f mit Ordnung $m_j \in \mathbb{N}$ sind.

Satz 4.3.2 (Rouché). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für $B := B_R(z_0)$ mit $\bar{B} \subset \Omega$ gelte

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial B.$$

Dann haben f und $f + g$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität) in B .

Korollar 5.1.1 (Cauchy). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, dazu $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma \in C_{pw}^1([0, 1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Satz 5.3.1 (Jensen). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B := B_R(0) \subset \bar{B} \subset \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial B$ und $f(0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\log |f(0)| = \sum_{k=1}^K \log \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta,$$

wobei z_1, \dots, z_K die Nullstellen von f in B bezeichnet und jede Nullstelle entsprechend ihrer Multiplizität n_k -mal in der Aufzählung erscheint.

Satz 5.3.4 (Phragmén-Lindelöf). Sei $S := \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{4}\}$, und sei $f \in C^0(\bar{S}; \mathbb{C})$ holomorph auf S mit Wachstumsordnung $\rho_f \leq 1$ und

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \partial S.$$

Dann gilt $|f(z)| \leq 1$ für jedes $z \in S$.

Satz 5.3.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ holomorph mit

$$|f_n(z) - 1| \leq c_n \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

für reelle $c_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Dann konvergiert $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, und $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

Zudem gilt für $z \in \Omega$ mit $f_n(z) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Serie 7, Aufgabe 4(a). Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keinen Pol auf der reellen Achse besitzt. Falls die Funktion $f(\frac{1}{z})$ bei 0 eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung hat, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \text{Im}(a) > 0}} \text{Res}_a f.$$

Serie 7, Aufgabe 5(a). Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der reellen Achse besitzt. Falls $f(\frac{1}{z})$ eine Nullstelle bei 0 hat, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \text{Im}(a) > 0}} \text{Res}_a(f(z)e^{iz}).$$

Serie 8, Aufgabe 4. Die biholomorphen Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind genau jene der Form $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Serie 10, Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Es existiert ein Zweig von $\log f$ auf Ω genau dann, wenn

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C_{\text{pw}}^1([0, 1], \Omega)$.