Funktionentheorie

Prof. Dr. Michael Struwe

Zusammenfassung:
Emmanuel Bauer & Michele Reho

20. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

1.1 Der n-dim. euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1.1 ($\mathbb{R}^n$, kanonische Basis, euklidische Norm, Metrik)**.** *klar*

1.2 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 1.2.1. *Auf* $\mathbb{R}^2$ *können wir durch*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix}$$

eine ***Multiplikation*** *einführen, welche assoziativ und kommutativ ist, und für die das Distributivgesetz gilt.*

2 Komplexe Differenzierbarkeit

2.1 Differenzierbare Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f = (f_k)_{1 \leq k \leq l} \colon \Omega \to \mathbb{R}^l, x_0 \in \Omega$.

Definition 2.1.1. *f ist diffbar an der Stelle x_0, falls eine lineare Abbildung $A = df(x_0) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ existiert mit*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + Ah)}{|h|} = 0.$$

Die Abbildung $A = df(x_0)$ heisst ***Differential*** *von f an der Stelle x_0 oder* ***Ableitung*** *von f.*
Äquivalent können wir schreiben

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

wobei $\frac{o(h)}{|h|} \to 0$ für $0 \neq h \to 0$. $df(x_0)$ die Koordinatendarstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

2.2 Komplex differenzierbare Funktionen

Definition 2.2.1. *Eine Funktion $f = u + iv \colon \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ heisst* ***komplex differenzierbar*** *(**$\mathbb{C}$-diffbar**) an der Stelle z_0, falls f an der Stelle z_0 (reell) differenzierbar ist mit $\mathbb{C}$-linearer Ableitung*

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0) \colon \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C},$$

wo $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc.

Satz 2.2.1 (Cauchy-Riemann Gleichungen)**.** Sei $f = u + iv \colon \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ reell diffbar. Dann ist f am Punkt z_0 $\mathbb{C}$-diffbar genau dann, wenn gilt

$$u_x = v_y, u_y = -v_x. \tag{2.2.1}$$

Satz 2.2.2. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ am Punkt $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diffbar. Dann existiert

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}, \tag{2.2.2}$$

und es gilt

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \tag{2.2.3}$$

Satz 2.2.3. Seien $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ (reell) diffbar, und es gelte (2.2.1), (2.2.3) oder es existiere $f'(z_0)$ wie in (2.2.2). Dann ist $df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, f also $\mathbb{C}$-diffbar am Punkt z_0.

2.3 Ableitungsregeln

Satz 2.3.1. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ komplex diffbar an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann ist f an dieser Stelle stetig; d.h. es gilt

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Satz 2.3.2. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-diffbar. Dann gilt:

i) Die Funktion $f + g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0);$$

ii) die Funktion $f \cdot_{\mathbb{C}} g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0);$$

iii) falls $g(z_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f/g\colon \Omega \setminus \{z : g(z) = 0\} \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Satz 2.3.3. Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset$ offen, $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ mit $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ an der Stelle $z_0 \in \mathcal{U}$ komplex diffbar, und sei $g\colon \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ an der Stelle $w_0 = f(z_0) \in \mathcal{V}$ komplex diffbar. Dann ist

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

2.4 Holomorphe Funktionen

Definition 2.4.1.

i) *f heisst* ***analytisch****, falls f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex diffbar ist.*

ii) *f heisst* ***holomorph****, falls f analytisch und die Funktion $f'\colon z \to f'(z)$ auf Ω stetig ist (d.h., falls f analytisch und von der Klasse C^1).*

Satz 2.4.1. Sei $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $f'(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es offene Umgebungen $\mathcal{U}$ von z_0, $\mathcal{V}$ von $f(z_0) =: w_0$ und eine holomorphe Funktion $g\colon \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ mit

$$(g \circ f)(z) = z, z \in \mathcal{U},$$

$$(f \circ g)(w) = w, w \in \mathcal{V},$$

und

$$g'(f(z)) = 1/f'(z), z \in \mathcal{U},$$
$$g'(w) = 1/f'(g(w)), w \in \mathcal{V}.$$

2.5 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$.

Definition 2.5.1.

i) *u heisst* ***harmonisch****, falls in Ω gilt*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

ii) *$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ heisst* ***Laplace-Operator****.*

Definition 2.5.2. *Harmonische Funktionen $u, v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ heissen* ***konjugiert harmonisch****, falls $f = u + i \cdot v\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist.*

Definition 2.5.3. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen. Eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \Omega'$ heisst* ***bi-holomorph****, falls f bijektiv ist mit holomorpher Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \Omega' \to \Omega$.*

3 Der Cauchysche Integralsatz

3.1 Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen $\gamma \in C^1([0,1];\Omega)$ eine Kurve in Ω mit $\dot{\gamma}(\mathrm{t})=\frac{d\gamma}{dt}(\mathrm{t})$, $0\leqslant \mathrm{t} \leqslant 1$.

Definition 3.1.1. *Die **Länge** von γ ist die Zahl*

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|dt.$$

Weiter sei $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$.

Definition 3.1.2. *Das **Wegintegral von** f **längs** γ ist*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt \in \mathbb{C}$$

Lemma 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$, $\gamma \in C^1([0,1];\Omega)$ gilt

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma).$$

Bemerkung 3.1.1. *Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1];\Omega)$ mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$ können wir zu einem Weg*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

zusammenhängen, welcher stückweise von der Klasse C^1 ist, $\gamma =: \gamma_1 + \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$. Für $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ definieren wir in diesem Fall

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

und können auf diese Weise das Wegintegral von f längs beliebiger Kurven $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ erklären.

Definition 3.1.3. *Der Weg $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ heisst **geschlossen**, falls $\gamma(1) = \gamma(0)$.*

3.1.1 Zusammenhang und Wegzusammenhang

Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen, $\Omega \neq \emptyset$.

Definition 3.1.4.

i) Eine Teilmenge $\emptyset \neq \mathcal{U} \subset \Omega$ heisst ***Zusammenhangskomponente*** *von Ω, falls $\mathcal{U}$ sowohl offen als auch (relativ) abgeschlossen ist.*

ii) Ω heisst ***zusammenhängend*** *(zshg.), falls Ω genau eine Zusammenhangskomponente hat.*

Definition 3.1.5. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Ω ist C^k-**wegzshg.** falls gilt:*

$$\forall z_0, z_1 \in \Omega \exists \gamma \in C^k([0,1;\Omega) : \gamma(0) = z_o, \gamma(1) = z_1$$

Lemma 3.1.2. Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen gilt:

$$\Omega \text{ zshg.} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 : \Omega \text{ ist } C^k\text{-wegzhg.}$$

Satz 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ sind äquivalent:

i) $\exists F \in C^1(\Omega;\mathbb{C}) : F$ holomorph, $F' = f$;

ii) $\int_\gamma f(z)dz$ ist für $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ nur abhängig von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$;

iii) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$.

3.2 Der Satz von Goursat

Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \in \Omega$ ein abgeschlossenes Dreieck mit Rand $\partial\mathcal{D}$. Wir können $\partial\mathcal{D}$ durch eine geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ parametrisieren, wobei wir γ so orientieren, dass $\mathcal{D}$ beim Durchlaufen von γ stets links liegt.

Satz 3.2.1 (Goursat)**.** Sei $\mathcal{D} \in \overline{\mathcal{D}} \in \Omega$ wie oben. Falls $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ analytisch, so gilt

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Korollar 3.2.1. Sei $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{Q}} \in \Omega$ ein Rechteck mit orientierem Rand $\partial\mathcal{Q}$, $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ analytisch. Dann gilt

$$\int_{\partial\mathcal{Q}} f(z)dz = 0.$$

3.3 Der Cauchysche Integralsatz auf einem Ball

Betrachte $\Omega = \mathcal{B}_R(z_*) \subset \mathbb{C}$. Der Satz von Goursat liefert das folgende Resultat.

Satz 3.3.1. Sei $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch, wobei $\Omega = \mathcal{B}_R(z_*)$ eine Kreisscheibe. Dann existiert $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $F' = f$.

Satz 3.3.2 (Cauchy)**.** Sei $\Omega = \mathcal{B}_R(z_*) \subset \mathbb{C}, f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch und $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Korollar 3.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, und sei $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ beschränkt mit $\partial\mathcal{U} \in C^1_{pw}$. Dann gilt

$$\int_{\partial\mathcal{U}} f(z)dz = 0.$$

3.4 Cauchysche Integralformel

Satz 3.4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}} \subset \Omega$ eine Kreisscheibe. Dann gilt

$$\forall z \in \mathcal{B} : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{B}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Korollar 3.4.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f glatt; insbesondere ist f holomorph. Genauer gilt:

i) f ist im Innern jedes Balles $\mathcal{B} = \mathcal{B}_R(z_0) \subset \overline{\mathcal{B}} \subset \Omega$ beliebig oft $\mathbb{C}$-diffbar mit
$$\forall z \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{B}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

ii) f lässt sich lokal um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ durch seine Taylorreihe
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$
darstellen.

Bemerkung 3.4.1. *Mit Korollar 3.4.1 i) erhalten wir insbesondere die* ***Cauchy-Ungleichungen***

$$\forall n \in \mathbb{N} : |f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n! \max_{\partial B_R(z_0)} |f|}{R^n}$$

für jedes $z_0 \in \Omega$ *und jedes* $R > 0$ *mit* $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$.

Korollar 3.4.2 (Identitätssatz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg. und seien $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Weiter gelte für ein $z_* \in \Omega$

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_*) = g^{(n)}(z_*).$$

Dann ist die Funktion $f - g$ konstant.

Korollar 3.4.3 (Nullstellen sind isoliert)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg., $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Sei weiter $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) = 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall z \in \mathcal{B}_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} : f(z) \neq 0.$$

Korollar 3.4.4 (Liouville)**.** Sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls $C \geqslant 0$ existiert mit $|f(z)| \leqslant C$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Korollar 3.4.5 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ ein nicht konstantes Polynom. Dann hat p (mindestens) eine Nullstelle.

Korollar 3.4.6 (Weierstrass)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^1(\Omega; \mathbb{C})$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ in $C^0_{loc}(\Omega, \mathbb{C})$; d.h., für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gelte

$$\sup_{z \in K} |f_k(z) - f(z)| \to 0 \ (k \to \infty).$$

Dann ist f holomorph und $f_k^{(n)} \xrightarrow{k \to \infty} f^{(n)}$ in $C^0_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 3.4.7 (Maximumsprinzip)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zshg., $f \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$ analytisch in Ω. Dann gilt

$$M := \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

und falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $|f(z_0)| = M$, so gilt $f \equiv f(z_0)$.

3.4.1 Hebbare Singularitäten

Unter gewissen Annahmen kann man analytische Funktionen in isolierten Ausnahmestellen ihres Definitionsbereichs zu holomorphen Funktionen fortsetzen.

Satz 3.4.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in C^1(\Omega \setminus \{a\}; \mathbb{C})$ holomorph mit

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Dann gibt es $\tilde{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus \{a\}$.

Satz 3.4.3 (Das Schwarzsche Lemma)**.** Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1(0)$, $f \colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leqslant 1$ für alle $z \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$|f'(0)| \leqslant 1, \forall z \in \mathcal{B} : |f(z)| \leqslant |z|.$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathcal{B}$, so ist $f(z) = cz$ linear, wobei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Korollar 3.4.8. Sei $f \colon \mathcal{B} = \mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{C} \to \mathcal{B}$ analytisch. Dann gelten für alle $z, z_0 \in \mathcal{B}$ die Ungleichtungen

$$|\frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)}| \leqslant |\frac{z - z_0}{1 - z_0 z}|$$

sowie

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Korollar 3.4.9. Sei $f \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ biholomorph. Dann gibt es $z_0 \in \mathcal{B}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}, z \in \mathcal{B}$$

4 Residuenkalkül

4.1 Pole und wesentliche Singularitäten

Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, und sei $f \colon \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Definition 4.1.1. *Die Stelle $a \in \Omega$ heisst*

i) ***hebbare Singularität****, falls*

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0;$$

ii) ***Pol von** f, falls*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty;$$

iii) ***wesentliche Singularität von** f, andernfalls.*

Satz 4.1.1. Sei $\Omega \in \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f \colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol an der Stelle z_0. Dann gilt:

i) Es gibt genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}, z \in \Omega \setminus \{z_0\}$$

ii) Es gibt $b_k \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n_0$, mit $b_{n_0} \neq 0$, wobei n_0 wie in i), und eine holomorphe Funktion $\phi \colon \Omega \to \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + ... + \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z), z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

iii) für $r > 0$ mit $\overline{\mathcal{B}_r(z_0)} \subset \Omega$ gilt

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Definition 4.1.2. *Die Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ in Satz 4.1.1 heisst **Ordnung** der Polstelle z_0.*

Definition 4.1.3. *Die Summe*

$$P(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + ... + \frac{b_1}{z-z_0}$$

heisst ***Hauptteil*** *von f an der Polstelle z_0,*

$$b_1 =: \operatorname{Res}_{z_0} f$$

heisst das ***Residuum*** *von f an dieser Stelle.*

Bemerkung 4.1.1.

i) Da alle Terme ausser dem Term $\frac{b_1}{z-z_0}$ in der Entwicklung 4.1.1 von f Stammfunktionen besitzen, gilt nach den Sätzen 3.1.1,3.3.2 und 3.4.1 für $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} f(z)dz = \frac{b_1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} = b_1 = \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

ii) Weitere Darstellungen des Residuums erhält man durch Multiplikation

$$(z-z_0)^{n_0} f(z) = b_{n_0} + b_{n_0-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{n_0-1} + (z-z_0)^{n_0}\phi(z).$$

Es folgt:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = b_1 = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n_0-1)!}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{n_0-1}\big((z-z_0)^{n_0} f(z)\big).$$

Satz 4.1.2 (Residuensatz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1, ..., z_k \in \Omega$, $f\colon \Omega \setminus \{z_k; 1 \leqslant k \leqslant K\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen bei $z_k, 1 \leqslant k \leqslant K$. Dann gilt für jeden Kreis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_R(z_0), R > 0$, mit $\overline{\mathcal{B}_R(z_0)} \subset \Omega$ und mit $\partial\mathcal{B}_R(z_0) \subset \Omega \setminus \{z_k; 1 \leqslant k \leqslant K\}$ die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{B}_R(z_0)} f(z)dz = \sum_{z_k \in \mathcal{B}_R(z_0)} \operatorname{Res}_{z_k} f.$$

Satz 4.1.3 (Casorati-Weierstrass)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann gilt

$$\forall r > 0 : \overline{f(\mathcal{B}_r(z_0) \cap \Omega)} = \mathbb{C}.$$

Satz 4.1.4 (Laurent-Reihenentwicklung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, $R > 0$ mit $\overline{\mathcal{B}_R(z_0)} \subset \Omega$. Dann gibt es Koeffizienten $a_n, n \in \mathbb{Z}$, so dass für jedes $z \in \mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei die Reihe lokal gleichmässig in $\mathcal{B}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ absolut konvergiert. Im Falle, dass f bei z_0 eine Polstelle hat der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, gilt zudem $a_n = 0$ für $n < n_0$.

4.2 Meromorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Definition 4.2.1. *f ist eine **meromorphe** Funktion auf Ω, falls es eine höchstens abzählbare Menge von Punkten $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω gibt mit*

i) $f\colon \Omega \setminus \{z_k; k \in \mathbb{N}_0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph;

ii) f hat eine Polstelle bei $z_k, k \in \mathbb{N}_0$.

Definition 4.2.2. *Eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst eine **ganze Funktion**.*

Definition 4.2.3. *Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ heisst **meromorph auf** $\overline{\mathbb{C}}$, falls für ein $R > 0$ gilt:*

i) $f|_{\mathcal{B}_{2R}(0)}\colon \mathcal{B}_{2R}(0) \to \overline{\mathbb{C}}$ ist meromorph.

ii) $f|_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathcal{B}_R(0)}}\colon \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{B}_R(0)} \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

iii) $F(z) = f(\frac{1}{z})\colon \mathcal{B}_{1/R}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ hat eine hebbare Singularität oder einen Pol an der Stelle $z_0 = 0$.

Satz 4.2.1. Sei $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist f rational; d.h., $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen $p, q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

4.3 Das Argumentprinzip

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) \neq 0$. Für $z \in \Omega$ nahe bei z_0 ist dann

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$$

bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ erklärt. Treffen wir eine Wahl für $\arg f(z_0)$, so können wir durch die Forderung der Stetigkeit für genügend kleine $r > 0$ eine holomorphe Funktion $\phi\colon \Omega \cap \mathcal{B}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ erklären mit

$$\phi(z) = \log f(z), z \in \Omega \cap \mathcal{B}_r(z_0),$$

und

$$\phi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, z \in \Omega \cap \mathcal{B}_r(z_0),$$

ist unabhängig von der Wahl des Arguments von $f(z)$.

Satz 4.3.1 (Argumentprinzip)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph, und sei $\mathcal{U}$ beschränkt mit $\overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ und so, dass f weder Polstellen noch Nullstellen auf $\partial\mathcal{U}$ besitzt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{U}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_k \in \mathcal{U}} n_k - \sum_{z_j \in \mathcal{U}} m_j,$$

wobei z_k die Nullstellen von f mit Ordnung $n_k \in \mathbb{N}$ und z_j die Polstellen von f mit Ordnung $m_j \in \mathbb{N}$ sind.

Satz 4.3.2 (Rouché)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und für $\mathcal{B} = \mathcal{B}_R(z_0)$ mit $\overline{\mathcal{B}} \subset \Omega$ gelte

$$\forall z \in \partial\mathcal{B} : |f(z)| > |g(z)|.$$

Dann haben f und die Funktion $f + g$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität) in $\mathcal{B}$.

Lemma 4.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega, f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht konstant mit $f'(z_0) = 0, w_0 = f(z_0)$. Dann gibt es $r > 0$ mit $\overline{\mathcal{B}_r(z_0)} \subset \Omega$ und $\delta > 0$ so dass jedes $w \in \mathcal{B}_\delta(w_0)$ mindestens zwei verschiedene Urbilder $z_1, z_2 \in \mathcal{B}_r(z_0)$ besitzt.

Korollar 4.3.1 (Offenheit holomorpher Funktionen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg., $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, $\mathcal{U} \subset \Omega$ offen. Dann ist $f(\mathcal{U})$ offen.

Korollar 4.3.2 (Biholomorphiesatz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0$ für jedes $z \in \Omega$, und f ist eine biholomorphe Abbildung von Ω auf $\tilde{\Omega} := f(\Omega)$.

5 Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

5.1 Homotopien, einfache zshg. Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und seien $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1];\Omega)$ Wege mit $\gamma_0(0) = z_0 = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = z_1 = \gamma_1(1)$.

Definition 5.1.1.

i) *γ_0 und γ_1 heissen zu einander* ***homotop*** *(bei festen Endpunkten), falls $\gamma \in C^0([0,1]\times[0,1];\Omega)$ existiert mit*

$$\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \gamma(1,t) = \gamma_1(t), 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma(s,0) = z_0, \gamma(s,1) = z_1, 0 \leq s \leq 1.$$

ii) *Für $\gamma_0, \gamma_1 \in C^k, k \in \mathbb{N}$ heisst γ eine C^k-****Homotopie****, falls $\gamma \in C^k$; insbesondere gilt dann: $\forall s \in [0,1] : \gamma_s = \gamma(s,\cdot) \in C^k$, $s \mapsto \gamma_s \in C^k$ stetig.*

Satz 5.1.1. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([0,1];\Omega)$ homotop bei festen Endpunkten. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Definition 5.1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann heisst Ω* ***einfach zusammenhängend*** *(1-zshg.), falls je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([0,1];\Omega)$ mit denselben Endpunkten zueinander homotop sind.*

Satz 5.1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg., $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Korollar 5.1.1 (Cauchy)**.** Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und 1-zshg., $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ geschlossen. Dann gilt: $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

5.2 Der komplexe Logarithmus

Satz 5.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg und mit $1 \in \Omega$,$0 \notin \Omega$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $F(z) = \log_\Omega(z)$, $z \in \Omega$, mit:

i) $e^{F(z)} = z$, $z \in \Omega$,

ii) $F(1) = 0$.

Satz 5.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, 1-zshg., $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Dann gibt es $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$e^{g(z)} = f(z), z \in \Omega.$$

5.3 Ganze Funktionen

Satz 5.3.1 (Jensen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B = B_R(0) \subset \bar{B} \subset \Omega$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial B$, $f(0) \neq 0$.
Dann gilt:

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{K} \log(\frac{|z_k|}{R}) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta,$$

wobei $z_1, ..., z_K$ die Nullstellen von f in B bezeichnet und jede Nullstelle entsprechend ihrer Multiplizität n_k-mal in der Aufzählung erscheint.

Satz 5.3.2 (Mittelwerteigenschaft)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $B = B_R(0) \subset \bar{B} \subset \Omega$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})d\theta.$$

Falls weiter $f = u + iv$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$, so gilt

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})d\theta.$$

Lemma 5.3.1. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \log|1 - ae^{i\theta}|d\theta = 0.$$

Definition 5.3.1. *Für holomorphes $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $r > 0$ sei*

$$n(r) := n_f(r) := \#\{z \in B_r(0); f(z) = 0\},$$

wobei jede Nullstelle mit ihrer Multiplizität gezählt wird.

Lemma 5.3.2. Für $R > 0$ gilt

$$\int_0^R n(r)\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^{K} \log(\frac{R}{|z_k|}),$$

falls $f(0) = 0$, wobei $z_1, ..., z_K \in B_r(0)$ die Nullstellen von f mit Multiplizität bezeichnet.

Definition 5.3.2. *Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\rho > 0$.*

*i) Die Funktion f hat **Wachstumsordnung** $\leq \rho$, falls gilt*

$$\exists A, B > 0 \forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq Aexp(B|z|^\rho).$$

ii) Die Ordnung des Wachstums von f ist dann

$$\rho_f := inf\{\rho > 0; f \text{ hat Wachstumsordnung} \leq \rho\}$$

Satz 5.3.3. Sei f ganz mit $\rho_f < \rho$. Dann gilt

i) $\exists C, R > 0 \forall r > R : n(r) \leq Cr\rho$.

ii) Sind $z_1, z_2, ...$ die Nullstellen von f mit Multiplizität, so gilt für jedes $s > \rho$, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty.$$

Satz 5.3.4 (Phragmén-Lindelöf)**.** Sei $S = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} | r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{4}\}$, und sei $f \in C^0(\bar{S}; \mathbb{C}$ holomorph in S mit $\rho_f \leq 1$ und mit

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \partial S.$$

Dann gilt $|f(z)| \leqslant 1$ für jedes $z \in S$.

Definition 5.3.3. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Das unendliche Produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

***konvergiert**, falls $A := \lim_{N \to \infty} \prod_{n=1}^{N} (1 + a_n)$ existiert, und $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) := A$.*

Lemma 5.3.3. Es gelte $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Dann konvergiert das Produkt

$$A := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n),$$

und A ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren. Weiter ist $A = 0$ gdw. $1 + a_{n_0} = 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

Satz 5.3.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\forall z \in \Omega : |f_n(z) - 1| \leq c_n, n \in \mathbb{N},$$

für $c_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Dann konvergiert $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, und $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Zudem gilt für $z \in \Omega$ mit $f_n(z) \neq 0, n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Beispiel 5.3.1 (Eulers Produktformel)**.**

$$\frac{sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}), z \in \mathbb{C}.$$

Beachte, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ für $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$ gilt

$$|f_n(z) - 1| \leq c_n = \frac{|z|^2}{n^2}, \sum_{n \neq 0} c_n < \infty.$$

Definition 5.3.4. *Für $k \in \mathbb{N}$ heisst*

$$E_k(z) = (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^k}{k}}, z \in \mathbb{C},$$

*der **kanonische Faktor** von Grad k. Setze weiter $E_0(z) = 1 - z$.*

Satz 5.3.6 (Hadamard)**.** Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\rho_f < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq \rho_f < k + 1$. Seien $z_1, z_2, \ldots$ die Nullstellen $z_n \neq 0$ von f. Dann gibt es ein Polynom p vom Grad $\leq k$, so dass

$$f(z) = e^{p(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/z_n), z \in \mathbb{C},$$

wobei $m \in \mathbb{C}$ die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$, falls $f(0) = 0$, und $m = 0$ falls $f(0) \neq 0$.

5.4 Die Gamma-Funktion

Definition 5.4.1. *Für $s > 0$ gilt gemäss der klassischen Definition*

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt. \tag{5.4.1}$$

Indem wir allgemein $t^s = \exp(s \cdot \log(t))$ setzen, können wir Γ holomorph auf die rechte Halbebene erweitern (Satz 5.4.1).

Satz 5.4.1. Durch (5.4.1) wird eine holomorphe Funktion Γ für $\mathrm{Re}(s) > 0$ erklärt.

Lemma 5.4.1. Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s);$$

insbesondere erhalten wir so $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 5.4.2. Es gilt für jedes $s \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \in \bar{\mathbb{C}}.$$

Korollar 5.4.1. Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Lemma 5.4.2. Für $0 < a < 1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{r^{a-1}}{1+r} dr = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

5.5 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Bemerkung 5.5.1. *Für reelles $s > 1$ konvergiert die Reihe*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Satz 5.5.1 (Euler)**.** Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}\}$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - (1/p)^s}.$$

Vermutung 5.5.1 (Riemannsche Vermutung)**.** *Alle Nullstellen s von ζ mit $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ haben* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

6 Der Riemannsche Abbildungssatz

6.1 Beispiele

Definition 6.1.1. *Im folgenden nennen wir zwei Gebiete $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ **biholomorph**, falls eine biholomorphe Abbildung $f\colon \Omega \to \tilde{\Omega}$ existiert.*

6.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Satz 6.2.1 (Riemann)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ offen und 1-zusammenhängend, $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.

Korollar 6.2.1. Je zwei offene und 1-zshg. Gebiete $\emptyset \neq \Omega, \tilde{\Omega} \subsetneq \mathbb{C}$ sind zueinander biholomorph.

Definition 6.2.1. *Eine Familie*

$$\mathcal{F} \subset \{f\colon \Omega \to \mathbb{C} | f \text{ holomorph}\} =: \mathcal{H}(\Omega)$$

heisst

*i) **gleichgradig stetig** auf $K \subset \Omega$, falls gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathcal{F} : \forall x, y \in K : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

*ii) **normal**, falls jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ eine lokal (d.h. auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$) gleichmässig konvergente Teilfolge besitzt.*

Lemma 6.2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gibt es kompakte Mengen $K_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 6.2.2. *Wir nennen eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im obigen Lemma eine **Ausschöpfung** von Ω.*

Lemma 6.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω, und sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset \mathring{K}_n$.

Satz 6.2.2 (Arzelà-Ascoli)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^0(K)$ gleichmässig beschränkt und gleichgradig stetig. Dann existiert eine Teilfolge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und $f \in C^0(K)$ mit $f_n \to f$ in $C^0(K)$ $(n \to \infty, n \in \Lambda)$

Satz 6.2.3 (Montel)**.** Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ lokal beschränkt im Sinne, dass für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gilt

$$\exists C > 0 \forall z \in K \forall f \in \mathcal{F} : |f(z)| \leq C.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ normal.