Formelsammlung

Satz 2.2.1 (Cauchy-Riemann Gleichungen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ reell differenzierbar. Dann ist $f = u + iv$ am Punkt z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn gilt

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Satz 3.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ sind äquivalent:

i) $\exists F \in C^1(\Omega;\mathbb{C})\colon F$ holomorph, $F' = f$;

ii) $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ ist für jedes $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ nur abhängig von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$;

iii) $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$.

Korollar 3.3.1 (Cauchy)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Sei $U \subset \bar{U} \subset \Omega$ beschränkt mit $\partial U \in C^1_{pw}$. Dann gilt

$$\int_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Satz 3.4.1 (Cauchy Integralformel)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, und sei $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ eine Kreisscheibe. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{für alle } z \in B.$$

Korollar 3.4.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f glatt; insbesondere ist f holomorph. Genauer gilt:

i) f ist im Innern jedes Balles $B := B_R(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ beliebig oft komplex differenzierbar mit

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{für alle } z \in B \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

ii) f lässt sich lokal um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ durch seine Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

darstellen.

Bemerkung 3.4.1 (Cauchy-Ungleichungen)**.** Sei Ω offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Für jedes $z_0 \in \Omega$ und jedes $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n! \max_{\partial B_R(z_0)} |f|}{R^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Korollar 3.4.6 (Weierstrass)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\Omega;\mathbb{C})$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ in $C^0_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{C})$; d.h., für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gelte

$$\sup_{z\in K} |f_k(z) - f(z)| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Dann ist f holomorph und $f_k^{(n)} \xrightarrow{k\to\infty} f^{(n)}$ in $C^0_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 3.4.7 (Maximumsprinzip)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und sei $f \in C^0(\overline{\Omega};\mathbb{C})$ analytisch in Ω. Dann gilt

$$M := \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

und falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $|f(z_0)| = M$, so ist $f \equiv f(z_0)$.

Satz 3.4.3 (Das Schwarzsche Lemma)**.** Sei $B = B_1(0)$ und sei $f\colon B \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leqslant 1$ für alle $z \in B$. Dann gilt

$$|f'(0)| \leqslant 1 \quad \text{ und } \quad |f(z)| \leqslant |z| \quad \text{für alle } z \in B.$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B$, so ist $f(z) = cz$ linear für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Satz 4.1.2 (Residuensatz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $Z := \{z_1, ..., z_K\} \subset \Omega$ und $f\colon \Omega \setminus Z \to \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen bei $z_k, 1 \leqslant k \leqslant K$. Dann gilt für jeden Kreis $B := B_R(z_0)$ für $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und mit $\partial B_R(z_0) \subset \Omega \setminus Z$ die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z_k\in B_R(z_0)} \mathrm{Res}_{z_k} f.$$

Satz 4.3.1 (Argumentprinzip)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph, und sei U beschränkt mit $\overline{U} \subset \Omega$ so, dass f weder Polstellen noch Nullstellen auf ∂U besitzt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{z_k\in U} n_k - \sum_{z_j\in U} m_j,$$

wobei z_k die Nullstellen von f mit Ordnung $n_k \in \mathbb{N}$ und z_j die Polstellen von f mit Ordnung $m_j \in \mathbb{N}$ sind.

Satz 4.3.2 (Rouché)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $B := B_R(z_0)$ mit $\bar{B} \subset \Omega$ gelte

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial B.$$

Dann haben f und $f + g$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität) in B.

Satz 5.3.1 (Jensen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $B := B_R(0) \subset \bar{B} \subset \Omega$ und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial B$ und $f(0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{K} \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| \,\mathrm{d}\theta,$$

wobei $z_1, ..., z_K$ die Nullstellen von f in B bezeichnet und jede Nullstelle entsprechend ihrer Multiplizität n_k-mal in der Aufzählung erscheint.

Satz 5.3.4 (Phragmén-Lindelöf)**.** Sei $S := \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r > 0, |\theta| < \frac{\pi}{4}\}$, und sei $f \in C^0(\bar{S}; \mathbb{C})$ holomorph auf S mit Wachstumsordnung $\rho_f \leq 1$ und

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{für alle } z \in \partial S.$$

Dann gilt $|f(z)| \leqslant 1$ für jedes $z \in S$.

Satz 5.3.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ holomorph mit

$$|f_n(z) - 1| \leq c_n \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

für reelle $c_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. Dann konvergiert $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, und $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph.
Zudem gilt für $z \in \Omega$ mit $f_n(z) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Serie 7, Aufgabe 4(a). Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keinen Pol auf der reellen Achse besitzt. Falls die Funktion $f(\frac{1}{z})$ bei 0 eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung hat, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a\, f.$$

Serie 7, Aufgabe 5(a). Sei $f(z)$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der reellen Achse besitzt. Falls $f(\frac{1}{z})$ eine Nullstelle bei 0 hat, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\substack{a \text{ Polstelle} \\ \mathrm{Im}(a)>0}} \mathrm{Res}_a(f(z)e^{iz}).$$

Serie 8, Aufgabe 4. Die biholomorphen Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind genau jene der Form $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$.

Serie 10, Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Es existiert ein Zweig von $\log f$ auf Ω genau dann, wenn

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0$$

für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in C^1_{\mathrm{pw}}([0,1], \Omega)$.