Funktionentheorie

Michael Struwe, ETHZ, HS 2018

Ziel: Aus der Verbindung von Konzepten der Differentialrechnung für Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Struktur der komplexen Multiplikation in $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$ entstehen spannende und tiefliegende neue Einsichten und auch für Anwendungen höchst wertvolle Resultate, wobei sich unerwartete Berührungspunkte mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (harmonische Funktionen) und der Zahlentheorie (Riemannsche Zeta-Funktion, Primzahlsatz) ergeben.

1. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (Wdhlg)

1.1 Der n-dim. euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

Der n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x^i)_{1 \le i \le n} = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \,;\; x^i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n \}$$

mit der kanonischen Basis

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \, i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)^t, \quad 1 \le i \le n, \text{ [1)]}$$

und der euklidischen Norm

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2}, \quad x = (x^i) \in \mathbb{R}^n,$$

ist ein vollständiger metrischer Raum bzgl. der Metrik

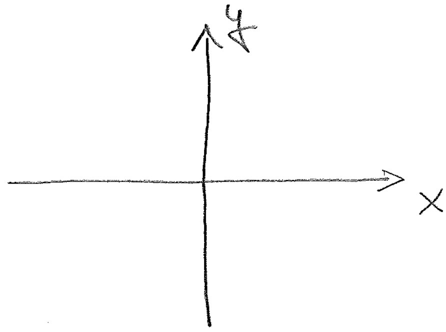
$$d(x,y) = |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

---

1) Bem.: Wir schreiben Vektoren $x = (x^i) \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

1.2 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$



Auf $\mathbb{R}^2$ können wir durch

$$(1.2.1)\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix}$$

eine *Multiplikation* einführen, welche assoziativ und kommutativ ist, und für die das Distributivgesetz gilt.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist *Einselement*, und mittels

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto x \cdot e_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen algebraisch in den Körper $(\mathbb{R}^2, \cdot) =: \mathbb{C}$ eingebettet. Statt $x \cdot e_1$ schreiben wir daher einfach x für $x \in \mathbb{R}$.

Weiter gilt für die *imaginäre Einheit*

$$i := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

und wir erhalten die Darstellung

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot e_1 + y e_2 = x + iy \in \mathbb{C}$$

für jedes Element von $\mathbb{C}$, wobei

$$x = \operatorname{Re}(x+iy) : \text{Realteil},$$

$$y = \operatorname{Im}(x+iy) : \text{Imaginärteil},$$

Mit der komplexen Konjugation

$$\mathbb{C} \ni z = x+iy \mapsto \bar{z} : x - iy \in \mathbb{C}$$

erhalten wir eine isometrische lineare Involution auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit

$$z \cdot \bar{z} = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

die euklidische Norm von $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Insbesondere sehen wir, daß für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die komplexe Zahl $\bar{z}/|z|^2 \in \mathbb{C}$ die (eindeutig bestimmte) zu z multiplikativ inverse Zahl ist.

Weiter gilt offenbar

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

sowie

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \forall z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{C},$$

wie unmittelbar aus (1.2.1) folgt, und damit

auch

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\overline{z}\, w \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Folglich konvergiert die Exponentialfunktion

$$\exp(w) = e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$$

für jedes $w \in \mathbb{C}$, und es gilt

$$\overline{e^w} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\frac{w^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{w}^k}{k!} = e^{\overline{w}}, \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Wir nennen $|z|$ den Absolutbetrag von z.

Polardarstellung.

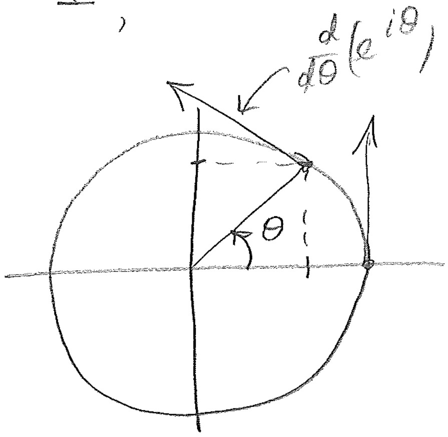
Insbesondere gilt

$$|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = e^0 = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

und wegen

$$\left|\frac{d}{d\theta}\left(e^{i\theta}\right)\right| = |i e^{i\theta}| = |i| = 1,$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(e^{i\theta}\right)\Big|_{\theta=0} = i$$



durchläuft die Kurve

$$\mathbb{R} \ni \theta \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn mit Geschwindigkeit 1 (im Bogenmaß).

Es folgt

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

und jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine Darstellung

$$z = re^{i\theta}$$

mit $r = |z|$ und $\theta \in \mathbb{R}$, wobei das Argument θ nur modulo 2π bestimmt ist.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$ können wir das Argument $-\pi < \theta < \pi$ normieren und erhalten so eine bijektive Abbildung

$$]0,\infty[\times]-\pi, \pi[\ni (r, \theta) \mapsto z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]),$$

deren Umkehrabbildung den Hauptzweig des komplexen Logarithmus

$$\log : \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]) \to \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

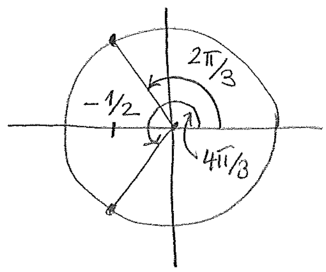
definiert mit $\log(z) := \log|z| + i \arg(z)$.

Die Polardarstellung vereinfacht viele Rechnungen erheblich.

<u>Beisp.:</u>

i) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{12} = \left(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{12} = e^{2\pi i} = 1$

ii) $\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$



n-te Wurzel.

Für $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, lösen offenbar (genau) die Zahlen

$$w_j = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot j\right)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

die Gleichung

$$w_j^n = z, \quad 1 \leq j \leq n.$$

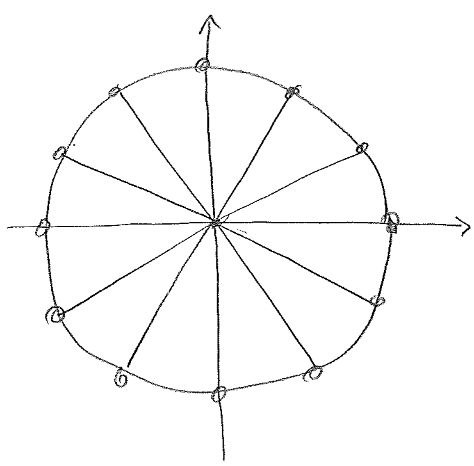
Insbesondere sind die Zahlen

$$e^{\frac{2\pi}{n} j \cdot i}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

die n verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$w^n = 1,$$

die n-ten Einheitswurzeln.



$n = 12$