2. Komplexe Differenzierbarkeit

2.1 Differenzierbare Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$

Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $x_0 \in \Omega$.

Def.: f ist diff.bar an der Stelle x_0, falls eine lineare Abb. $A = df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ existiert mit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + Ah)}{|h|} = 0 .$$

$A = df(x_0)$ heißt Differential von f an der Stelle x_0 oder Ableitung von f.

Äquivalent können wir schreiben

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

wobei

$$\frac{o(h)}{|h|} \to 0 \text{ für } 0 \neq h \to 0$$

Falls $f = (f^k)_{1 \le k \le l}$, so hat

$df(x_0)$ die Koordinatendarstellung

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1(x_0)}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f^l(x_0)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^l(x_0)}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

2.2 Komplex differenzierbare Funktionen

Wir verbinden nun Differenzierbarkeit mit der komplexen Struktur auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, und sei

$$f : \Omega \ni z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f(z) = u(z) + i\,v(z) = \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Def. 2.2.1. f heißt komplex differenzierbar ($\mathbb{C}$-diffbar) an der Stelle z_0, falls f an der Stelle z_0 (reell) diffbar ist mit $\mathbb{C}$-linearer Ableitung

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0) : \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C},$$

wo $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc.

Welche Konsequenzen hat die zusätzliche Forderung der $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$?

Satz 2.2.1 (Cauchy-Riemann Glg.) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ reell diffbar. Dann ist f am Punkt z_0 $\mathbb{C}$-diffbar genau dann, wenn gilt

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{2.2.1}$$

Zum <u>Beweis</u> bemerken wir zunächst, daß die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z = x + iy \mapsto iz = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$$

durch die reelle 2×2-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. $\mathbb{C}$-Linearität von

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0)$$

bedeutet damit, daß gilt

$$\forall\, h = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} : \quad df(z_0) J h = J\, df(z_0)\, h .$$

Also ist die Bedingung

$$df(z_0) J = J\, df(z_0),$$

äquivalent zur $\mathbb{C}$-Linearität; ausgeschrieben also die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} u_y & -u_x \\ v_y & -v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x & -v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix},$$

Die Beh. folgt. $\square$

Bem.: Falls

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

so ist die Matrix-Multiplikation mit $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ äquivalent zur Multiplikation

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \longmapsto (a+ib)z \in \mathbb{C}$$

Bew.: Rechne

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

$$\hat{=} (ax - by) + i(bx + ay)$$

$$= (a+ib)(x+iy).$$

$\square$

Falls für $df(z_0)$ also die CR-Glg (2.2.1) erfüllt sind, so ist Matrixmultiplikation mit $df(z_0)$ äquivalent zu komplexer Multiplikation mit

$$u_x + i v_x = v_y - i u_y.$$

Weitere, für die Rechnung hilfreiche Folgerungen sind im folgenden Satz zusammengetragen.

<u>Satz</u> 2.2.2. Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ am Punkt $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diff.bar. Dann existiert

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C},$$

und es gilt

$$(2.2.2) \quad f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

<u>Bew.</u>: Nach Annahme existiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abb. $A = df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - A \cdot \overset{e_1 = \binom{1}{0}}{\overset{\|}{1}} \right| = \frac{|f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)|}{|z - z_0|} \underset{\substack{(z \to z_0 \\ z \neq z_0)}}{\longrightarrow} 0.$$

Also existiert $f'(z_0)$ wie angegeben mit $f'(z_0) = A \cdot 1 \in \mathbb{C}$. Für $z = z_0 + h\binom{1}{0}$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$, $h \to 0$ erhält man $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$; für $z = z_0 + h\binom{0}{1}$, h wie oben folgt

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad \square$$

Umgekehrt ist jede der Bedingungen (2.2.1) oder (2.2.2) oder die Existenz von $f'(z_0)$ hinreichend für $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$.

<u>Satz</u> 2.2.3. Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ (reell) diffbar, und es gelte (2.2.1) oder (2.2.2) oder es existiere $f'(z_0)$. Dann ist $df(z_0)$ $\mathbb{C}$-linear, f also $\mathbb{C}$-diffbar am Punkt z_0.

<u>Bew.</u>: i) Wie im Beweis von Satz 2.2.1 gezeigt, ist für $f = \binom{u}{v}: \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ die Bedingung (2.2.1) äquivalent zur Bedingung $J\,df(z_0) = df(z_0)\,J$, welche wiederum äquivalent ist zur $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$.

ii) Mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}, \quad -i\frac{\partial f}{\partial y} = -J\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}$$

sieht man die Äquivalenz von (2.2.2) mit (2.2.1).

iii) Wie im Beweis von Satz 2.2.2 gezeigt, folgt aus der Existenz von $f'(z_0)$ die Bedingung (2.2.2).

$\square$

Beisp. 2.2.1. i) Jede konstante Funktion

$f(z) = c$ für $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-diffbar an

jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0.$

ii) Jede Potenz $f(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit

festem $n \in \mathbb{N}$ ist an jeder Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar

mit

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z_0^{n-k} = n z_0^{n-1}.$$

iii) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$.

Dann ist die Möbiusabbildung

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : \Omega = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}$$

an jeder Stelle $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diffbar, und

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{1}{z - z_0} \frac{(az + b)(cz_0 + d) - (az_0 + b)(cz + d)}{(cz + d)(cz_0 + d)}$$

$$= \frac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2}.$$

iv) Die lineare Funktion $z \mapsto \bar{z}$ ist an keiner Stelle $\mathbb{C}$-diffbar.

<u>Bew.:</u> Stelle dar

$$f: \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \ni z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \bar{z} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}.$$

Mit

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

ist (2.2.1) an keiner Stelle z_0 erfüllt.

v) Die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto |z|^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist nur an der Stelle $z_0 = 0$ $\mathbb{C}$-diffbar.

<u>Bew.:</u> Da $f(z) = |z|^2$ reell, gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z), \frac{\partial f}{\partial y}(z) \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

also die Glg. (2.2.2) mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

genau dann, wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$.
Dies ist genau für $z_0 = 0$ der Fall.

2.3 Ableitungsregeln

Die folgenden Sätze ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen für Abbildungen $f: \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, bzw. den Rechenregeln für Grenzwerte.

<u>Satz 2.3.1.</u> Sei $f: \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex diffbar an der Stelle $z_0 \in \Omega$. Dann ist f an dieser Stelle stetig; d.h., es gilt

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

<u>Bew.:</u> Mit Fehler $\frac{o(h)}{|h|} \to 0$ $(0 \neq h \in \mathbb{C}, h \to 0)$ gilt

$$f(z) = f(z_0) + df(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \underset{(z \to z_0)}{\longrightarrow} f(z_0). \qquad \square$$

<u>Beisp. 2.3.1.</u> Möbiustransformationen

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C}, \quad \text{wo } c \neq 0,$$

sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

<u>Satz</u> 2.3.2. Seien $f, g : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ $\mathbb{C}$-diffbar. Dann gilt:

i) Die Funktion $f+g : \Omega \to \mathbb{C}$ ist an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0);$$

ii) die Funktion $f \overset{\mathbb{C}\text{-Mult.}}{\cdot} g : \Omega \to \mathbb{C}$ ist an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0);$$

iii) falls $g(z_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f/g : \Omega \setminus \{z;\, g(z) = 0\} \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

<u>Beisp.</u> 2.3.2.i) Polynome $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind an jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diffbar mit

$$f'(z_0) = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, z_0^{k-1}, \quad z_0 \in \mathbb{C};$$

vgl. Beisp. 2.2.1.ii).

ii) Rationale Funktionen $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen $p, q \neq 0$ sind $\mathbb{C}$-diffbar an jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z;\ q(z) = 0\}$; vgl. auch Beisp. 2.2.1. iii).

Auch die Kettenregel gilt.

<u>Satz</u> 2.3.3. Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ mit $f(U) \subset V$ an der Stelle $z_0 \in U$ komplex diffbar, und sei $g: V \to \mathbb{C}$ an der Stelle $w_0 = f(z_0) \in V$ komplex diffbar.

Dann ist $g \circ f: U \to \mathbb{C}$ am Punkt z_0 komplex diffbar mit

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

<u>Bew.</u>: Für $z_k \xrightarrow{(k \to \infty)} z_0$, $z_k \neq z_0$ $(k \in \mathbb{N})$, erhalten wir

$$\frac{(g \circ f)(z_k) - (g \circ f)(z_0)}{z_k - z_0} = \frac{g(f(z_k)) - g(f(z_0))}{f(z_k) - f(z_0)} \; \frac{f(z_k) - f(z_0)}{z_k - z_0}$$

$$\to g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0),$$

falls $f(z_k) \neq f(z_0)$ $(k \in \mathbb{N})$, bzw. $\to 0 = f'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$ sonst. $\square$

2.4 Holomorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

Def. 2.4.1. i) f heißt analytisch, falls f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex diff'bar ist.

ii) f heißt holomorph, falls f analytisch ist und die Funktion $z \mapsto f'(z)$ auf Ω stetig ist (d.h., falls f analytisch und von der Klasse C^1).

Bem. 2.4.1. Eines der großen Wunder der Funktionentheorie ist die Tatsache, daß analytische Funktionen automatisch von der Klasse C^1, also holomorph, sind. Wir werden dies bald zeigen; einstweilen aber müssen wir die obige Unterscheidung peinlich beachten!

Für holomorphe Funktionen gilt der Umkehrsatz.

<u>Satz 2.4.1</u>. Sei $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $f'(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es offene Umgebungen $\mathcal{U}$ von z_0, V von $f(z_0) =: w_0$ und eine holomorphe Funktion $g: V \to \mathbb{C}$ mit

$$(g \circ f)(z) = z, \quad z \in \mathcal{U},$$
$$(f \circ g)(w) = w, \quad w \in V,$$

und

$$g'(f(z)) = 1/f'(z), \quad z \in \mathcal{U},$$
$$g'(w) = 1/f'(g(w)), \quad w \in V.$$

<u>Bew.</u>: Schreibe $f = \binom{u}{v}: \Omega \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
Mit Satz 2.2.1 folgt

$$df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix},$$

mit Satz 2.2.2 also

$$\det(df(z_0)) = u_x^2 + v_x^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right|^2 = |f'(z_0)|^2 > 0.$$

Der Umkehrsatz für die C^1-Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liefert somit offene Umgebungen $U \subset \Omega$ von z_0, $V \subset \mathbb{R}^2$ von $w_0 = f(z_0)$ und eine C^1-Funktion $g: V \to U$ mit

$$g \circ f = id|_U \;, \qquad f \circ g = id|_V \;,$$

und

$$dg(w_0) = \left(df(z_0)\right)^{-1}.$$

Weiter folgt mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -J^{-1}$ aus der $\mathbb{C}$-Linearität von $df(z_0)$ auch

$$dg(w_0)\, J = \left(J^{-1} df(z_0)\right)^{-1} = -\left(J\, df(z_0)\right)^{-1}$$

$$= -\left(df(z_0)\, J\right)^{-1} = J\, dg(w_0)\,,$$

und damit, daß g $\mathbb{C}$-diffbar. $\square$

Beisp. 2.4.1. i) Nach Beisp. 2.2.1. iii) gilt für die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, welche die Bedingungen

$$ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0$$

erfüllen, die Darstellung

$$f'(z_0) = \frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} \neq 0, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}.$$

Nach Satz 2.4.1 ist also f lokal umkehrbar mit holomorpher Umkehrfunktion.

In der Tat ist die Gleichung

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

mittels der Umformungen

$$cwz + dw = az + b, \quad (cw-a)z = b - dw$$

wieder durch eine Möbiustransformation

$$z = g(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ eindeutig lösbar.

Beachte: Schreiben wir $g(w) = \dfrac{\tilde{a} w + \tilde{b}}{\tilde{c} w + \tilde{d}}$ mit $\tilde{a} = -d$, $\tilde{b} = b$, $\tilde{c} = c$, $\tilde{d} = -a$, so gilt

$$\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = ad - bc \neq 0 .$$

Weiter gilt:

$$\frac{a}{c} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} , \quad -\frac{d}{c} = \lim_{|w| \to \infty} \frac{-dw+b}{cw-a}$$

sowie

$$|f(z)| = \left| \frac{az+b}{cz+d} \right| \to \infty \quad (z \to -\tfrac{d}{c}),$$

$$|g(w)| = \left| \frac{-dw+b}{cw-a} \right| \to \infty \quad (w \to \tfrac{a}{c}).$$

Ergänzen wir $\mathbb{C}$ durch den Punkt "∞" zur Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so sehen wir, daß die Möbiustransformationen eine Gruppe[1] von Abbildungen von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich bilden.

---

[1] Übung: Zeige, daß das Produkt $g \circ f$ zweier Möbiustransformationen wieder eine Möbiustransformation ist.

ii) Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \in \mathbb{C}$$

ist holomorph mit Ableitung

$$\exp'(z_0) = \exp(z_0) \neq 0 \in \mathbb{C}.$$

Wegen

$$e^{2\pi i + z} = e^z, \quad z \in \mathbb{C},$$

genügt es,

$$\exp : \Omega = \{ z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im}(z)| < \pi \} \to \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$$

mit $\exp^{-1} = \log$ zu betrachten. Satz 2.4.1 liefert dann

$$\log'(e^z) = 1/e^z, \quad \forall z \in \Omega;$$

d.h.,

$$\log'(w) = \frac{1}{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]).$$

2.5 Harmonische Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$.

Def. 2.5.1. i) u heißt harmonisch, falls gilt

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

ii) $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ heißt Laplace-Operator.

Sei nun $f = \binom{u}{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ holomorph und von der Klasse C^2. Mit den Cauchy-Riemann Gleichungen

$$u_x = v_y \,, \quad u_y = -v_x$$

aus Satz 2.2.1 erhalten wir

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

und analog $\Delta v = 0$.

Def. 2.5.2. Harmonische Funktionen $u, v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ heißen konjugiert harmonisch, falls $f = u + iv : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Def. 9.4.2. Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ offen.
Eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \Omega'$ heißt *bi-holomorph*, falls f bijektiv ist mit holomorpher Umkehrfunktion $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$.

Beisp. 9.4.2. i) Die Möbiustransformation f aus Beisp. 9.4.1. i) ist eine bi-holomorphe Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}.$$

ii) $\exp : \Omega = \{z ; |\operatorname{Im}(z)| < \pi\} \to \Omega' = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0])$
ist bi-holomorph.

Man kann zeigen, daß zu jeder harmonischen Funktion $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ lokal eine konjugiert harmonische Funktion existiert.

Sei z.B. $\Omega = B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Für $z = x+iy \in \Omega$ setze [1]

$$v(z) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(tz)\,y - \frac{\partial u}{\partial y}(tz)\,x \right) dt .$$

Rechne

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \int_0^1 \Big(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(tz)}_{= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(tz)}\, ty - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(tz)\,tx - \frac{\partial u}{\partial y}(tz) \Big) dt,$$

$$= -\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t\,\frac{\partial u}{\partial y}(tz)\right) dt = -\frac{\partial u}{\partial y}(z) ;$$

analog
$$\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) ,$$

und
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 .$$

Siehe Salamon, Übung 2.46.

---

[1] Dieser Ansatz ist motiviert durch die Identität
$$v(z) - v(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} v(tz)\,dt = \int_0^1 \big(v_x(tz)\,x + v_y(tz)\,y\big)\,dt, \quad z \in B,$$
für $v \in C^1(B)$ und die CR-Gleichungen (2.2.1).