3. Der Cauchysche Integralsatz

3.1 Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$ eine Kurve in Ω mit $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$, $0 \le t \le 1$.

Def. 3.1.1. Die Länge von γ ist die Zahl

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt.$$

Weiter sei $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$.

Def. 3.1.2. Das Wegintegral von f längs γ ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \underset{\mathbb{C}\text{-Mult.}}{\cdot} \dot\gamma(t)\, dt \in \mathbb{C}.$$

Bem. 3.1.1: (Parameterinvarianz des Wegintegrals)
Wie im Fall des mittels dem Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ $(n=2)$ definierten (skalaren) Wegintegrals gilt für Umparametrisierungen mittels $\varphi \in C^1([a,b]; [0,1])$:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(\varphi(s)))\, \underbrace{\dot\gamma(\varphi(s))\frac{d\varphi}{ds}(s)}_{=\frac{d}{ds}(\gamma\circ\varphi)(s)}\, ds = \int_\gamma f(z)\, dz,$$

falls $\varphi(a) = 0,\ \varphi(b) = 1$ (orientierungserhaltend);

bzw.

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz,$$

falls $\varphi(a) = 1,\ \varphi(b) = 0$ (orientierungsumkehrend).

Beisp. 3.1.1. i) Sei $f(z) = 1$, $\gamma \in C^1([0,1]; \mathbb{C})$. Dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \dot\gamma(t)\,dt = \gamma(1) - \gamma(0).$$

ii) Sei $f(z) = z$, $\gamma \in C^1([0,1]; \mathbb{C})$. Dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \gamma(t)\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \frac{\gamma^2(1)}{2} - \frac{\gamma^2(0)}{2}.$$

Allgemein gilt:

Lemma 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$, $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$ gilt
$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma).$$

Bew.: Wegen der Monotonie des Integrals gilt
$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt\right|$$
$$\leq \int_0^1 |f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)|\,dt$$
$$= \int_0^1 |f(\gamma(t))|\,|\dot\gamma(t)|\,dt$$
$$\leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(\gamma(t))| \cdot \underbrace{\int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt}_{= L(\gamma)}.$$
$\square$

Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1]; \Omega)$ mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$ können wir zu einem Weg

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

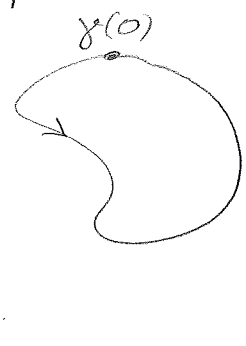
zusammenhängen, welcher stückweise von der Klasse C^1 ist, $\gamma =: \gamma_1 + \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$.

Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ definieren wir in diesem Fall

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

und können auf diese Weise das Wegintegral von f längs beliebiger Kurven $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ erklären.

<u>Def</u>. 3.1.3. Der Weg $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $\gamma(1) = \gamma(0)$.



Zusammenhang und Wegzusammenhang.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\Omega \neq \emptyset$.

Def. 3.1.4. i) Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subset \Omega$ heißt Zusammenhangskomponente von Ω, falls U sowohl offen als auch (relativ) abgeschlossen ist.

ii) Ω heißt zusammenhängend (zshg.), falls Ω genau eine Zshg.-Komponente hat.

Bem. 3.1.2: Für $\emptyset \neq \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$ gilt:

$$\Omega \text{ zshg} \iff \forall\, \emptyset \neq U, V \overset{\text{offen}}{\subset} \Omega : \Omega = U \cup V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset.$$

Def. 3.1.5. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Ω ist C^k-weg-zshg. falls gilt:

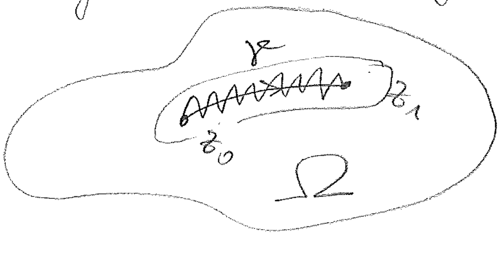
$$\forall\, z_0, z_1 \in \Omega\ \exists\, \gamma \in C^k([0,1]; \Omega) : \gamma(0) = z_0,\ \gamma(1) = z_1.$$

Lemma 3.1.2. Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen gilt:

$$\Omega \text{ zshg.} \iff \forall\, k \in \mathbb{N}_0 : \Omega \text{ ist } C^k\text{-wegzshg.}$$

Bem: Da Ω offen, genügt es, die Aussage für $k = 0$ zu zeigen.

Uns interessiert nur "$\Rightarrow$".



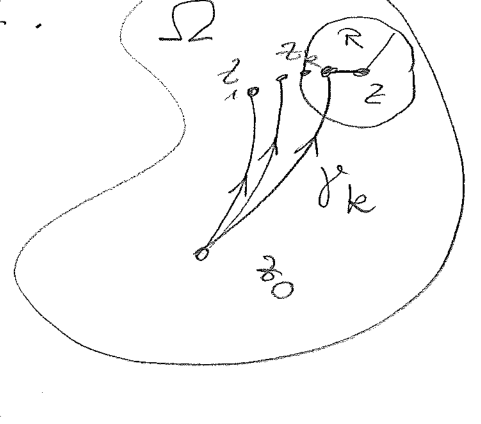
Bew.: "$\Rightarrow$" Fixiere $z_0 \in \Omega$ und definiere

$$\mathcal{U} = \{ z_1 \in \Omega;\ \exists \gamma \in C^0([0,1];\Omega) : \gamma(0) = z_0,\ \gamma(1) = z_1 \}.$$

Dann gilt $z_0 \in \mathcal{U}$, also $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Da Ω offen, gibt es zu jedem $z_1 \in \mathcal{U}$ einen Ball $B_R(z_1) \subset \Omega$, und man kann einen Weg γ_{z_1} von z_0 nach z_1 durch Anhängen des Weges $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $0 \le t \le 1$, für jedes $z_2 \in B_R(z_1)$ zu einem Weg $\gamma_{z_2} = \gamma_{z_1} + \gamma$ von z_0 nach z_2 fortsetzen; es gilt also $B_R(z_1) \subset \mathcal{U}$, und $\mathcal{U}$ ist offen.

Schließlich gilt für $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ mit $z_k \to z \in \Omega$ $(k \to \infty)$ für $R > 0$ mit $B_R(z) \subset \Omega$ auch $z_k \in B_R(z)$ für genügend große $k \ge k_0$. Einen Weg γ_{z_k} von z_0 nach z_k kann man dann wie oben durch Anhängen von $\gamma(t) = z_k + t(z - z_k)$, $0 \le t \le 1$, zu einem Weg $\gamma_z = \gamma_{z_k} + \gamma$ von z_0 nach z ergänzen; $\mathcal{U}$ ist also auch (relativ) abgeschlossen in Ω.

Da Ω zshg., folgt $\mathcal{U} = \Omega$.



Analog zur Charakterisierung konservativer Kraftfelder $f = \nabla F$ mittels dem skalaren Wegintegral im $\mathbb{R}^n$ gilt folgender Satz.

Satz 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ sind äquivalent:

i) $\exists\, F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$: F holomorph, $F' = f$;

ii) $\int_\gamma f(z)\,dz$ ist für jedes $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ nur abhängig von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$;

iii) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$.

Bew.: Wir zeigen i) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i).

i) $\Rightarrow$ iii) Sei $f = F'$ mit holomorphem $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$, und sei $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$. Dann gilt nach der Kettenregel mit $F'(z) = dF(z) : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)$$

$$= dF(\gamma(t))\, \dot\gamma(t) = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t),$$

also
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t)\,dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0,$$

falls γ geschlossen. Analog für $\gamma \in C^1_{pw}$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.

Sei $-\gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ die Kurve mit

$$-\gamma_2(t) = \gamma_2(1-t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Dann ist $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ geschlossen,

also

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

nach Annahme ii) und Bem. 3.1.1.

ii) $\Rightarrow$ i) OBdA sei Ω zusammenhängend (zshg.) (Sonst betrachte jede Zshg.-Komponente.) Da Ω offen, ist Ω auch C^1-wegzshg.

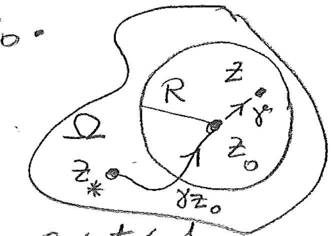
Fixiere $z_* \in \Omega$, und für $z \in \Omega$ setze

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei $\gamma_z \in C^1([0,1]; \Omega)$ ein beliebiger Weg von $\gamma_z(0) = z_*$ nach $\gamma_z(1) = z$ ist.

Nach Annahme ii) ist F wohldefiniert.

Sei nun $z_0 \in \Omega$. Da Ω offen, gibt es $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset \Omega$. Sei $\gamma_{z_0} \in C^1([0,1], \Omega)$ ein Weg mit $\gamma_{z_0}(0) = z_*$, $\gamma_{z_0}(1) = z_0$.



Für $z = z_0 + h \in B_R(z_0)$ ist dann

$$\gamma_z = \gamma_{z_0} + \gamma \,, \quad \gamma(t) = z_0 + th \,, \quad 0 \le t \le 1 \,,$$

ein Weg der Klasse C^1_{pw} von z_* nach z, und

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= F(z_0) + \int_0^1 f(z_0 + th) \cdot h \, dt \,.$$

Es folgt

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \int_0^1 f(z_0 + th)\, dt$$

$$\to f(z_0) \quad (h \to 0,\ h \neq 0) \,.$$

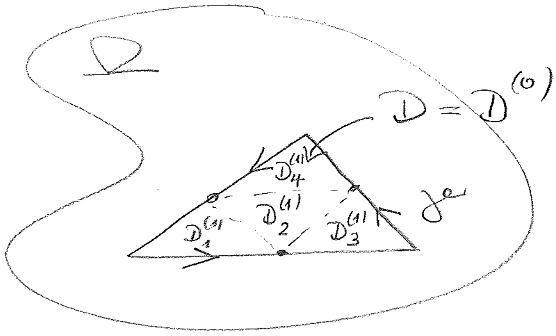
Nach Satz 2.2.3 ist F am Punkt z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Da f stetig, ist $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph.

$\square$

Unser nächstes Ziel ist es zu beweisen, daß jede analytische Funktion $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ lokal eine Stammfunktion besitzt. Mit Satz 3.1.1 folgt dann, daß das Wegintegral von f längs genügend kleiner geschlossener Kurven verschwindet. Letzteres läßt sich für Ränder von Dreiecken oder Rechtecken jedoch auch allein unter Benutzung der komplexen Differenzierbarkeit von f zeigen, und dies genügt, um lokal ein holomorphes F zu konstruieren mit $F' = f$, wie wir in den nächsten beiden Abschnitten sehen werden.

3.2 Der Satz von Goursat

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $D = \overline{D} \subset \Omega$ ein abg. Dreieck mit Rand ∂D. Wir können ∂D durch eine geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ parametrisieren, wobei wir γ so orientieren, daß D beim Durchlaufen von γ stets links liegt.



Satz 3.2.1 (Goursat) Sei $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ wie oben. Falls $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ analytisch, so gilt

$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_\gamma f\,dz = 0.$$

Bew.: Nimm widerspruchsweise an, daß für ein analytisches $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ gilt:

$$I^{(0)} := \int_{\partial D} f\,dz \neq 0.$$

Definiere Dreiecke $D =: D^{(0)} \supset D^{(1)} \supset \ldots$ iterativ, wie folgt:

$j = 1$: Die Ecken von $D = D^{(0)}$ und die Mittelpunkte der Seiten von D sind Eckpunkte von 4 Dreiecken $D_1^{(1)}, \ldots, D_4^{(1)}$ mit orientiertem Rand $\partial D_k^{(1)}$, wobei

$$L(\partial D_k^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\partial D^{(0)}), \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Da die Wegintegrale längs $\partial D_j^{(1)}$ und $\partial D_k^{(1)}$ längs gemeinsamer Kanten gegenläufig orientiert sind und einander aufheben, gilt

$$I^{(0)} = \int_{\partial D} f \, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k^{(1)}} f \, dz,$$

und es gibt $k_1 \in \{1, \ldots, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\partial D_{k_1}^{(1)}} f \, dz \right| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4}.$$

Setze $\quad D^{(1)} := D_{k_1}^{(1)}$.

$j \mapsto j+1$: Sei $D^{(j)} \subset D^{(0)}$ bereits definiert mit $L(\partial D^{(j)}) = \frac{1}{2^j} L(\partial D^{(0)})$, $\left| \int_{\partial D^{(j)}} f \, dz \right| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^j}$.

Unterteile $D^{(j)}$ wie im Schritt $j=1$ in 4 zu $D^{(j)}$ ähnliche Dreiecke $D_k^{(j+1)} = \overline{D_k^{(j+1)}}$ mit orientiertem Rand $\partial D_k^{(j+1)}$, wobei

$$L\left(\partial D_k^{(j+1)}\right) = \frac{1}{2} L\left(\partial D^{(j)}\right) = \frac{L(\partial D^{(0)})}{2^{j+1}}, \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Da wiederum gilt

$$I^{(j)} := \int_{\partial D^{(j)}} f \, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k^{(j+1)}} f \, dz,$$

existiert $k_{j+1} \in \{1, \dots, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\partial D_{k_{j+1}}^{(j+1)}} f \, dz \right| \geq \frac{|I^{(j)}|}{4} \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^{j+1}}.$$

Setze $\qquad D^{(j+1)} := D_{k_{j+1}}^{(j+1)} \subset D^{(j)}.$

Da $D^{(j)}$ kompakt, $j \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D^{(j+1)} \subset D^{(j)} \subset \dots \subset D$, existiert $z_* \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} D^{(j)}$.

Für $z \in \Omega$ nahe z_* gilt nach Annahme

$$f(z) = f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*) + o(z - z_*),$$

wobei
$$\frac{o(z-z_*)}{|z - z_*|} \to 0 \quad (z \to z_*).$$

Mit Beispiel 3.1.1, bzw. Satz 3.1.1 folgt

$$I^{(j)} = \int_{\partial D^{(j)}} f \, dz = \underbrace{\int_{\partial D^{(j)}} f(z_*) \, dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial D^{(j)}} f'(z_*)(z - z_*) \, dz}_{=0} + R^{(j)},$$

wobei Lemma 3.1.1 die Abschätzung liefert

$$|R^{(j)}| \leq \max_{z \in \partial D^{(j)}} |f(z) - f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*)| \, L(\partial D^{(j)})$$

$$\leq o\left(L(\partial D^{(j)})\right) L(\partial D^{(j)}) = o(1)\left(L(\partial D^{(j)})\right)^2 = \frac{o(1)}{4^j}$$

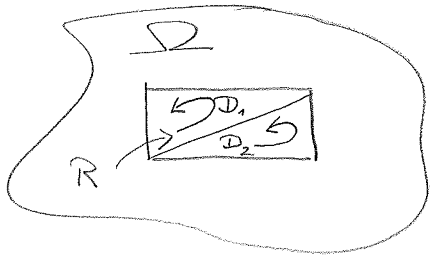
mit $o(1) \to 0$ $(j \to \infty)$. Andererseits gilt nach Konstruktion und Annahme

$$|R^{(j)}| = |I^{(j)}| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^j}, \quad I^{(0)} \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

Kor. 3.2.1: Sei $Q = \overline{Q} \subset \Omega$ ein Rechteck mit orientiertem Rand ∂Q, $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch. Dann gilt

$$\int_{\partial Q} f(z)\, dz = 0.$$



Bew.: Zerlege $Q = D_1 \cup D_2$ mit Dreiecken $D_i \subset \Omega$ mit orientiertem Rand ∂D_i, $i = 1, 2$.

Dann gilt

$$\int_{\partial Q} f\, dz = \int_{\partial D_1} f\, dz + \int_{\partial D_2} f\, dz,$$

und die Behauptung folgt mit Satz 3.2.1. □

Beisp. 3.2.1: Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx.$$

Beachte: Quadratische Ergänzung liefert

$$e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} = e^{-\pi (x^2 + 2 i x \cdot \xi - \xi^2 + \xi^2)}$$

$$= e^{-\pi (x + i\xi)^2} \cdot e^{-\pi \xi^2}.$$

Weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1 .$$

<u>Beh.:</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,dx = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$

<u>Bew.:</u> Für $\xi, R > 0$ betrachte das Rechteck

$$Q_R = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} ;\ |x| \leq R,\ 0 \leq y \leq \xi \},$$

mit orientiertem Rand

$$\partial Q_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 ,$$

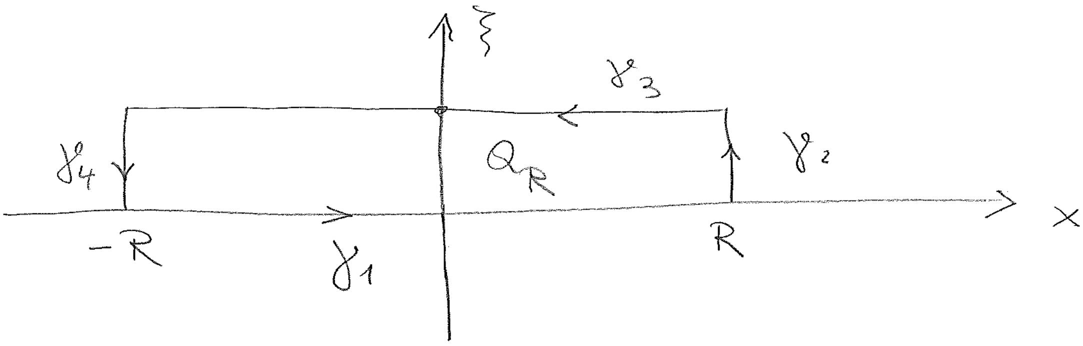
wobei

$$\gamma_1(t) = 2R \cdot t - R , \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_2(t) = R + it\xi , \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_3(t) = R - 2Rt + i\xi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_4(t) = -R + i(1-t)\xi, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Da die Funktion

$$f(z) = e^{-\pi z^2}$$

analytisch ist, gilt nach Kor. 3.2.1

$$0 = \int_{\partial Q_R} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \ldots + \int_{\gamma_4} f\,dz;$$

also

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = -\int_{\gamma_3} f\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz + \int_{\gamma_4} f\,dz$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}dx + I_2 + I_4 .$$

Mit

$$|I_{2,4}| \leq \max_{0\leq t\leq 1} \left| e^{-\pi(R\pm it\xi)^2} \right| \cdot \xi$$

$$= \xi \cdot \max_{0\leq t\leq 1} e^{-\pi(R^2-t^2\xi^2)} \to 0 \ (R\to\infty).$$

folgt
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}dx = 1 ,$$

Analog für $\xi < 0$. $\square$

Es folgt:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}: \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dx}_{\substack{= \text{Fourier-Transformierte } \hat{f}(\xi) \\ \text{der Funktion } f(x) = e^{-\pi x^2}.}} = e^{-\pi \xi^2}.$$

"Die Funktion $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ist ihre eigene Fourier-Transformierte."