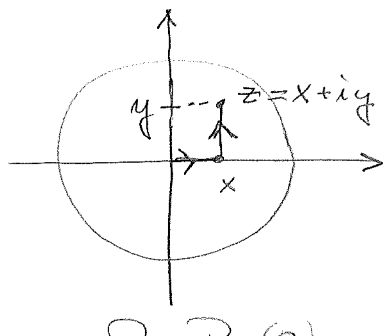
3.3 Der Cauchysche Integralsatz auf einem Ball

Betrachte $\Omega = B_R(z_*) \subset \mathbb{C}$. Der Satz von Goursat liefert das folgende Resultat.

Satz 3.3.1. Sei $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch, wobei $\Omega = B_R(z_*)$ eine Kreisscheibe. Dann existiert $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $F' = f$.

Bew.: OBdA sei $z_* = 0$. Zu $z = x + iy \in \Omega = B_R(0)$ setze

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} 2t\,x, & 0 \le t \le 1/2, \\ x + i(2t-1)\,y, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$



und definiere

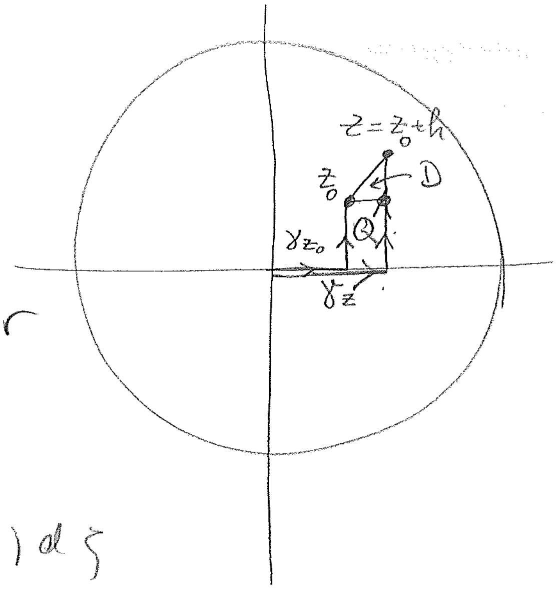
$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta .$$

Beh.: F ist an jeder Stelle $z_0 \in \Omega = B_R(0)$ $\mathbb{C}$-diffbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$.

Bew.: Sei $z_0 \in \Omega$. Für $z \in \Omega$ schreibe

$z = z_0 + h$.

Mit dem Rechteck Q und Dreieck D wie in nebenstehender Figur gilt



$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$+ \underbrace{\int_{\partial Q} f(\zeta)\,d\zeta}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial D} f(\zeta)\,d\zeta}_{=0} + \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta\,,$$

wobei $\gamma(t) = z_0 + th$, $0 \leq t \leq 1$.

Mit Satz 3.2.1 und Kor. 3,2,1 folgt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(z_0 + th)\,dt \cdot h\,.$$

Nach Division durch h folgt Existenz von

$$F'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 f(z_0 + th)\,dt$$

$$= f(z_0)\,. \qquad \square$$

Der Satz folgt.

Bem. 3.3.1: Der oben angegebene Beweis ist dem Buch von Shakarchi-Stein, S. 37 f., entnommen. Studierende schlugen nach der Vorlesung die folgende, einfachere Konstruktion vor:

Zu gegebenem analytischem $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$, wo $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{C}$, und zu beliebigem $z \in \Omega$ setze

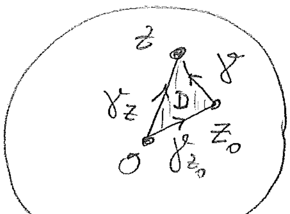
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f \, d\zeta, \quad \text{wo } \gamma_z(t) = tz, \; 0 \le t \le 1.$$

Zu festem $z_0 \in \Omega$ und beliebigem $z = z_0 + h$ bilden dann die Wege γ_{z_0}, γ_z und

$$\gamma(t) = z_0 + th, \quad 0 \le t \le 1,$$

die Seiten eines Dreiecks $D = \overline{D} \subset \Omega$ mit

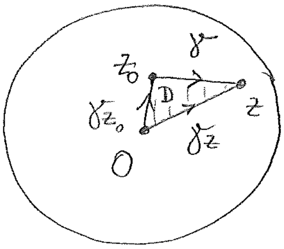
$$\pm \partial D = \gamma_z - \gamma - \gamma_{z_0},$$



und Satz 3.2.1 liefert

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f \, d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f \, d\zeta$$

$$= \underbrace{\int_{\partial D} f \, d\zeta}_{=0} + \int_{\gamma} f \, d\zeta = \int_{\gamma} f \, d\zeta$$



wie zuvor.

Als Korollar erhalten wir den Satz von Cauchy für eine Kreisscheibe.

Satz 3.3.2 (Cauchy). Sei $\Omega = B_R(z_*) \subset \mathbb{C}$, $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch, $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Bew.: Gemäß Satz 3.3.1 existiert eine holomorphe Funktion $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ mit $F' = f$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 3.1.1. □

Beisp. 3.3.1. Wir zeigen die Formel

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Betrachte dazu die auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1 - e^{iz}}{z^2}, \quad z = x + iy,$$

Für $R, \varepsilon > 0$ betrachte den halben Kreisring

$$A_{R,\varepsilon} = \{ z = x + iy;\ \varepsilon < |z| < R,\ y > 0 \}$$

mit orientiertem Rand

$$\partial A_{R,\varepsilon} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$

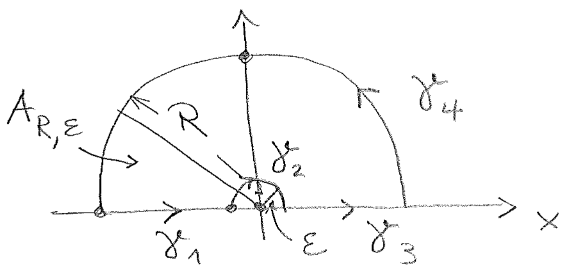
wobei

$$\gamma_1(t) = t - R, \quad 0 \le t \le R - \varepsilon,$$

$$\gamma_2(t) = \varepsilon e^{i(\pi - t)}, \quad 0 \le t \le \pi,$$

$$\gamma_3(t) = t, \quad \varepsilon \le t \le R,$$

$$\gamma_4(t) = R e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi.$$



Durch Hinzunahme von $\pm \gamma_5$ mit

$$\gamma_5(t) = it, \quad \varepsilon \le t \le R,$$

können wir $A_{R,\varepsilon} = A^-_{R,\varepsilon} \cup A^+_{R,\varepsilon}$ zerlegen in

$$A^{\pm}_{R,\varepsilon} = \{ z = x + iy \in A_{R,\varepsilon};\ \pm x \ge 0 \}.$$

Da $A^+_{R,\varepsilon}$, bzw. $A^-_{R,\varepsilon}$ jeweils in einem Kreis $B^\pm \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ enthalten sind, folgt mit Satz 3.3.2

$$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{\partial A^+_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{\partial A^-_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0.$$

Mit der Abschätzung

$$|f(z)| = \frac{|1-e^{ix}\cdot e^{-y}|}{R^2} \leq \frac{2}{R^2}, \quad z = x+iy = Re^{it}$$

für $0 \leq t \leq \pi$ und Lemma 3.1.1 folgt

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2}{R^2}\underbrace{L(\gamma_4)}_{=\pi R} = \frac{2\pi}{R} \to 0 \ (R\to\infty).$$

Mit $$e^{iz} - (1+iz) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!} = -z^2\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(iz)^{k-2}}{k!}}_{=:E(z)},$$

wobei

$$|E(z)| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(iz)^{k-2}}{k!}\right| \leq C \text{ für } |z| \leq 1,$$

erhalten wir zudem

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2}\left(\frac{-iz}{z^2} + E(z)\right)dz = \int_0^{\pi}\frac{+i}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}}\,i\varepsilon e^{i(\pi-t)}\,dt + O(\varepsilon)$$
$$= -\pi + O(\varepsilon) \to -\pi \ (\varepsilon \downarrow 0).$$

Mit Symmetrie $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\downarrow 0}} \left(\int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_3} f\,dz \right)$$

$$= -\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\downarrow 0}} \left(\int_{\gamma_2} f\,dz + \int_{\gamma_4} f\,dz \right) = \pi .$$

3.4 Cauchysche Integralformel

Aus Satz 3.3.2 erhalten wir eine Darstellung für f.

Satz 3.4.1. Sei $f:\Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, $B\subset \overline{B}\subset\Omega$ eine Kreisscheibe. Dann gilt

$$\forall z\in B:\ f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta .$$

Bew.: OBdA sei $B=B_R(0)$. Zu gegebenem $z\in B$ und $0<\varepsilon<R-|z|$ betrachte

$A_{R,\varepsilon}=B_R(0)\setminus B_\varepsilon(z)$.

Beh.: $$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{\partial B_R(0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int_{\partial B_\varepsilon(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0.$$

Bew.: Zerlege $A_{R,\varepsilon}$ mittels eines genügend feinen Gitters in Teilgebiete $A^k_{R,\varepsilon}$, $1\le k\le K$, die jeweils in einem Ball $B_k\subset\Omega\setminus\{z\}$ enthalten sind. Da sich die Wegintegrale entlang gemeinsamer Kanten von $A^k_{R,\varepsilon}$ und $A^j_{R,\varepsilon}$ für $j \neq k$ aufheben, folgt

$$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial A^k_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

gemäß Satz 3.3.2. □

Mit Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ erhalten wir bei Wahl der Parametrisierung

$$\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

von $\partial B_\varepsilon(z)$ nun

$$\int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_\varepsilon(t))}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt \to 2\pi i f(z),$$

wie gewünscht. ☑

Es folgt, daß analytische Funktionen stets auch glatt sind. Die anfangs gemachte Unterscheidung zwischen "analytischen" und "holomorphen" Funktionen ist also unnötig.

<u>Kor.</u> 3.4.1 Sei $f: \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f glatt; insbesondere ist f holomorph. Genauer gilt:

i) f ist im Innern jedes Balles $B = B_R(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ beliebig oft $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$\forall z \in B, n \in \mathbb{N}_0: f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta .$$

ii) f läßt sich lokal um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ durch seine Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

darstellen.

Bew.: i) (Induktion nach n). Für $n = 0$ folgt die Behauptung mit Satz 3.4.1.

Nimm an, f ist n-mal $\mathbb{C}$-diffbar in B und

$$\forall z \in B: \ f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Fixiere $z_1 \in B$. Für $z \neq z_1 \in B$ nahe z_1 gilt

$$\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_1)}{z - z_1} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\zeta) \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z_1)^{n+1}}}{z - z_1} \right)} d\zeta$$

$$\xrightarrow[(z \to z_1)]{(*)} \frac{n+1}{(\zeta - z_1)^{n+2}}.$$

Beachte, daß die Konvergenz (*) gleichmäßig bzgl. $\zeta \in \partial B$ gilt. Daher kann man den Grenzübergang $z \to z_1$ mit der Integration über ∂B vertauschen, und es existiert

$$f^{(n+1)}(z_1) = \lim_{\substack{z \to z_1 \\ z \neq z_1}} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_1)}{z - z_1} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}}.$$

ii) Fixiere $z_0 \in \Omega$. Für $R > 0$ mit $B = B_R(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ und $z \in B$ gilt nach Satz 3.4.1 die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

Für $z \in B$ nahe z_0 schreibe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

und entwickle

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n .$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ und $z \in B_r(z_0)$ bei festem $0 < r < R$.

Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$

wobei wir i) benutzen. $\square$

Bem. 3.4.1. i) Mit Kor. 3.4.1. i) erhalten wir insbesondere die Cauchy-Ungleichungen

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! \max_{\partial B_R(z_0)} |f|}{R^n}$$

für jedes $z_0 \in \Omega$ und jedes $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$

ii) Mit den Cauchy-Ungleichungen in i) konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n =: p(z; z_0)$$

gemäß Kor. 3.4.1. ii) absolut und gleichmäßig auf jedem Ball $B_R(z_0)$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$.

Bew.: Zu $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ gibt es $R_1 > R$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset B_{R_1}(z_0) \subset \overline{B_{R_1}(z_0)} \subset \Omega$, da Ω nach Annahme offen.

Für $z \in \overline{B_R(z_0)}$ können wir dann mit i) den Reihenrest von p abschätzen:

$$\sum_{n=j}^{k} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right| \leq \max_{\partial B_{R_1}(z_0)} |f| \sum_{n=j}^{k} \left(\frac{R}{R_1} \right)^n \xrightarrow[(j, k \to \infty)]{} 0,$$

gleichmäßig in z.

Kor. 3.4.2 (Identitätssatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg. und seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Weiter gelte für ein $z_* \in \Omega$

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_*) = g^{(n)}(z_*).$$

Dann ist die Funktion $f-g$ konstant.

Bew.: OBdA sei $g \equiv 0$. (Sonst betrachte $\tilde{f} := f-g$.)

Sei

$$\mathcal{U} = \{ z \in \Omega ;\ f(z) = f(z_*),\ \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z) = 0.$$

Dann gilt $\mathcal{U} \neq \phi$, da $z_* \in \mathcal{U}$. Weiter gilt gemäß Kor. 3.4.1. ii) für jedes $z_0 \in \mathcal{U}$ und genügend kleines $r > 0$ so daß $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ auch

$$f(z) = f(z_0) \text{ für } z \in B_r(z_0),$$

also auch

$$f^{(n)}(z) = 0 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N},\ z \in B_r(z_0),$$

und $\mathcal{U}$ ist offen.

Schließlich folgt mit der Stetigkeit von f und $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, auch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ in Ω, da Ω zshg., also $\mathcal{U} = \Omega$. $\square$

Kor. 3.4.2 liefert nun auch die folgende Aussage.

Kor. 3.4.3 (Nullstellen sind isoliert)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zslg, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Sei weiter $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) = 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}: f(z) \neq 0.$$

Bew.: Da nach Annahme die Menge Ω zslg. und die Funktion f nicht konstant, gibt es gemäß Kor. 3.4.2 eine kleinste Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$, und gemäß Kor. 3.4.1, ii) gilt

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^{n_0} g(z)$$

mit

$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-n_0}$$

$$= \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + O(z-z_0) \xrightarrow{(z \to z_0)} g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0;$$

also

$$|f(z)| \geq |z-z_0|^n \frac{|g(z_0)|}{2} \text{ für } 0 < |z-z_0| < \varepsilon \ll 1.$$

$\square$

Kor. 3.4.4 (Liouville). Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls $C \geq 0$ existiert mit $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Bew.: Gemäß Kor. 3.4.1.i) oder Bem. 3.4.1.i) gilt für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$, jedes $R > 0$ die Abschätzung

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \leq \frac{C}{R}.$$

Mit $R \to \infty$ folgt $f'(z_0) = 0$, also $f' \equiv 0$, und f ist konstant. □

Kor. 3.4.5 (Fundamentalsatz der Algebra)
Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ein nicht konstantes Polynom. Dann hat p (mindestens) eine Nullstelle.

Bew.: (indirekt) Nimm an, es existiert $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \not\equiv p(0)$ ohne Nullstelle.

Da p nicht konstant, gilt

$$k_1 := \max\{k;\ a_k \neq 0\} \geq 1.$$

OBdA sei $k_1 = n$, $a_n = 1$. (Sonst betrachte $\frac{p(z)}{a_n}$.)

Für $|z| \geq R \geq 1$ schätze ab

$$|p(z)| = |z|^n \left|\left(1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-n}\right)\right|$$

$$\geq R^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}| R^{-k}\right) \geq 1,$$

falls

$$R = 2 \cdot \max\left\{1, \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}|\right\}.$$

Da $\overline{B_R(0)}$ kompakt, $p(z) \neq 0$ gilt

$$\delta := \min_{|z| \leq R} |p(z)| > 0.$$

Es folgt: Die holomorphe Funktion $f = \frac{1}{p}$ ist beschränkt $|f(z)| \leq \max\{1, 1/\delta\}$. Kor 3.4.4 ergibt die Beh.

$\square$

<u>Kor. 3.4.6</u> (Weierstrass) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\Omega;\mathbb{C})$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_k \xrightarrow{(k\to\infty)} f$ in $C^0_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$; d.h., für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gelte

$$\sup_{z\in K} |f_k(z) - f(z)| \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Dann ist f holomorph und $f_k^{(n)} \xrightarrow{(k\to\infty)} f^{(n)}$ in $C^0_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bew.:</u> Es genügt, die Aussage auf jedem Ball mit $K = \overline{K} \subset B_R(z_0) \subset \overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und für $n=1$ zu zeigen.

Mit Kor. 3.4.1. i) erhalten wir

$$\sup_{z\in K} |f_k'(z) - f_j'(z)| = \sup_{z\in K} \frac{1}{2\pi}\left| \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f_k(\zeta)-f_j(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right|$$

$$\leq \sup_{z\in \overline{B_R(z_0)}} |f_k(z) - f_j(z)| \cdot \sup_{z\in K,\, \zeta\in\partial B_R(z_0)} \frac{R}{|\zeta - z|} \xrightarrow[(j,k\to\infty)]{} 0.$$

Also gilt $f_k' \xrightarrow{(k\to\infty)} g$ in $C^0(K;\mathbb{C})$, und mit

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{k\to\infty} \frac{f_k(z+h)-f_k(z)}{h} = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k'(z+th)\,dt = \int_0^1 g(z+th)\,dt$$

für $z \in B$, $0 < |h| < dist(z, \partial B)$ erhalten wir nach Grenzübergang $h \to 0$ die Gleichheit

$$f'(z) = g(z),$$

wie gewünscht. $\square$

Kor. 3.4.7 (Maximumsprinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zshg, $f \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$ analytisch in Ω. Dann gilt

$$M := \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|,$$

und falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $|f(z_0)| = M$, so gilt $f \equiv f(z_0)$.

Bew.: Nimm an, es gibt $z_0 \in \Omega$ mit

$$|f(z_0)| = M > 0.$$

(Andernfalls ist die Behauptung richtig.)

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(z_0) = 0$.

Bew.: (indirekt) Nimm an, $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und n_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Nach Kor. 3.4.1. ii) gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)^{n_0} g(z), \quad z \in B_R(z_0),$$

mit
$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0}, \quad z \in B_R(z_0),$$

wobei $0 < R < \mathrm{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Mit
$$g(z) \xrightarrow{(z \to z_0)} g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0,$$
folgt für $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
$$\frac{(z-z_0)^n g(z)}{|z-z_0|^n} \cdot \overline{f(z_0)} = e^{int} g(z) \overline{f(z_0)}$$
$$\xrightarrow[(r \downarrow 0)]{} e^{int} g(z_0) \overline{f(z_0)}.$$

Wähle $t \in [0, 2\pi]$ mit
$$c_0 := e^{int} g(z_0) \overline{f(z_0)} > 0.$$

Es folgt für genügend kleine $r > 0$, $z = z_0 + re^{int}$
$$f(z)\overline{f(z_0)} = |f(z_0)|^2 + r^n \underbrace{e^{int} g(z) \overline{f(z_0)}}_{\to c_0 \, (r \downarrow 0)}$$
$$> |f(z_0)|^2,$$

also wegen
$$f(z)\overline{f(z_0)} \leq |f(z)| \, |f(z_0)|$$
insbesondere
$$|f(z)| > |f(z_0)|$$
im Widerspruch zu unserer Annahme. $\square$

Da Ω zshg. folgt mit

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \;, \quad n \in \mathbb{N}$$

und Kor. 3.4.2 nun $f \equiv f(z_0)$,

wie gewünscht. $\square$

Hebbare Singularitäten.

Unter gewissen Annahmen kann man analytische Funktionen in isolierten Ausnahmestellen ihres Definitionsbereichs zu holomorphen Funktionen ergänzen.

Satz 3.4.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in C^1(\Omega \setminus \{a\}; \mathbb{C})$ holomorph mit

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Dann gibt es $\tilde{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus \{a\}$.

Bew.: Sei $R > 0$ mit $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$, $z \in B_R(a) \setminus \{a\}$.

Beh.: Es gilt

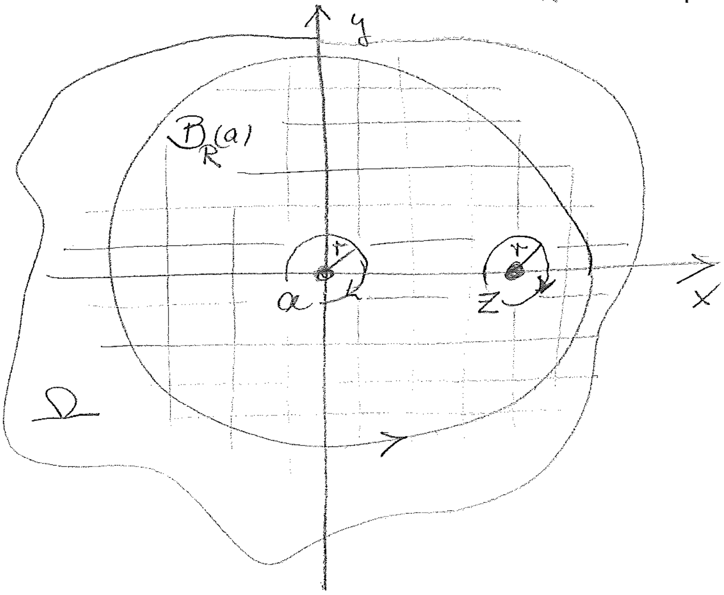
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Bew.: Für $0 < r < \frac{1}{2} \min\{|z-a|, R-|z-a|\}$ zerlege

$$U := B_R(a) \setminus \left(B_r(a) \cup B_r(z)\right) = \bigcup_{k=1}^{K} U_k$$

in endlich viele $U_k \subset B_{R_k}(z_k) \subset \overline{B_{R_k}(z_k)} \subset \Omega$,

mit Rand $\partial U_k \in C^1_{pw}$ wie in der Skizze



durch ein zur Achse durch a und z paralleles Gitter genügend feiner Maschenweite.

Mit Satz 3.3.2 erhalten wir

$$\int_{\partial\left(B_R(a) \setminus (B_r(a) \cup B_r(z))\right)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial U_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

wobei $$\int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt \to 2\pi i f(z) \quad (r \downarrow 0)$$

und $$\left| \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \le \max_{|\zeta - a| = r} \frac{2\pi r |f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \le \frac{4\pi}{|z-a|} \max_{|\zeta - a| = r} |(\zeta - a) f(\zeta)|$$

$$\to 0 \quad (r \downarrow 0).$$

$\square$

Die Funktion $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \,, \quad z \in B_R(a),$$

und $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus B_R(a)$ erfüllt also $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus \{a\}$, und $\tilde{f}$ ist holomorph auf Ω. $\square$

Als eine erste Anwendung dieses Satzes beweisen wir die folgende Aussage.

Satz 3.4.3 (Das Schwarzsche Lemma)
Sei $B = B_1(0)$, $f: B \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in B$.
Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1, \quad \forall z \in B: |f(z)| \leq |z|,$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B$, so ist $f(z) = cz$ linear, wobei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Bew.: Die Funktion $g: \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in \mathbb{B} \setminus \{0\}, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

ist stetig und auf $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ analytisch.
Gemäß Satz 3.4.2 ist g holomorph auf ganz $\mathbb{B}$.

Weiter gilt nach Voraussetzung

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{|z|}, \quad z \in \mathbb{B} \setminus \{0\};$$

also mit dem Maximumprinzip (Kor. 3.4.7) für jedes $0 < r < 1$

$$\sup_{z \in B_r(0)} |g(z)| \leq \sup_{z \in \partial B_r(0)} |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Nach Grenzübergang $r \uparrow 1$ ergibt dies die Ungleichung $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{B}$, also

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{B}.$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{B}$, so gilt $|g(0)| = 1$, bzw. $|g(z)| = 1$ für ein $z \in \mathbb{B}$, und $g \equiv c \in \mathbb{C}$ nach Kor. 3.4.7. $\square$