3. Der Cauchysche Integralsatz

3.1 Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$ eine Kurve in Ω mit $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$, $0 \le t \le 1$.

Def. 3.1.1. Die Länge von γ ist die Zahl

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt.$$

Weiter sei $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$.

Def. 3.1.2. Das Wegintegral von f längs γ ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,dt \in \mathbb{C}.$$

$\mathbb{C}$-Mult.

Bem. 3.1.1: (Parameterinvarianz des Wegintegrals)
Wie im Fall des mittels dem Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ $(n=2)$ definierten (skalaren) Wegintegrals gilt für Umparametrisierungen mittels $\varphi \in C^1([a,b]; [0,1])$:

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(\varphi(s)))\, \underbrace{\dot\gamma(\varphi(s))\frac{d\varphi}{ds}(s)}_{=\frac{d}{ds}(\gamma\circ\varphi)(s)}\, ds = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

falls $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ (orientierungserhaltend);

bzw.

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz,$$

falls $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$ (orientierungsumkehrend).

Beisp. 3.1.1. i) Sei $f(z) = 1$, $\gamma \in C^1([0,1]; \mathbb{C})$.

Dann gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \dot\gamma(t)\,dt = \gamma(1) - \gamma(0).$$

ii) Sei $f(z) = z$, $\gamma \in C^1([0,1]; \mathbb{C})$. Dann

gilt
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 \gamma(t)\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \frac{\gamma^2(1)}{2} - \frac{\gamma^2(0)}{2}.$$

Allgemein gilt:

Lemma 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$, $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$

gilt
$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma).$$

Bew.: Wegen der Monotonie des Integrals

gilt
$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)|\,dt \\ &= \int_0^1 |f(\gamma(t))|\,|\dot\gamma(t)|\,dt \\ &\leq \max_{0\leq t\leq 1} |f(\gamma(t))| \cdot \underbrace{\int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt}_{= L(\gamma)}.\end{aligned}$$

$\square$

Wege $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1]; \Omega)$ mit $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$ können wir zu einem Weg

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

zusammenhängen, welcher stückweise von der Klasse C^1 ist, $\gamma =: \gamma_1 + \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$.

Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ definieren wir in diesem Fall

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

und können auf diese Weise das Wegintegral von f längs beliebiger Kurven $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ erklären.

<u>Def</u>. 3.1.3. Der Weg $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $\gamma(1) = \gamma(0)$.

Zusammenhang und Wegzusammenhang.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\Omega \neq \emptyset$.

Def. 3.1.4. i) Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subset \Omega$ heißt Zusammenhangskomponente von Ω, falls U sowohl offen als auch (relativ) abgeschlossen ist.

ii) Ω heißt zusammenhängend (zshg.), falls Ω genau eine zshg.-Komponente hat.

Bem. 3.1.2: Für $\emptyset \neq \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C}$ gilt:

$$\Omega \text{ zshg} \iff \forall\, \emptyset \neq U, V \overset{\text{offen}}{\subset} \Omega : \Omega = U \cup V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset.$$

Def. 3.1.5. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Ω ist C^k-weg-zshg. falls gilt:

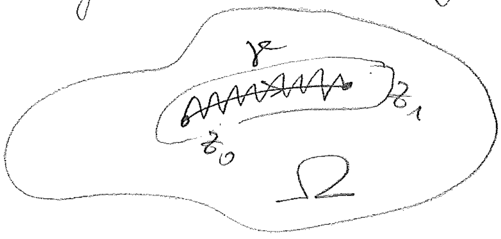
$$\forall\, z_0, z_1 \in \Omega\ \exists \gamma \in C^k([0,1];\Omega) : \gamma(0) = z_0,\ \gamma(1) = z_1.$$

Lemma 3.1.2. Für $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen gilt:

$$\Omega \text{ zshg.} \iff \forall k \in \mathbb{N}_0 : \Omega \text{ ist } C^k\text{-wegzshg.}$$

Bem: Da Ω offen, genügt es, die Aussage für $k=0$ zu zeigen.

Uns interessiert nur "$\Rightarrow$".



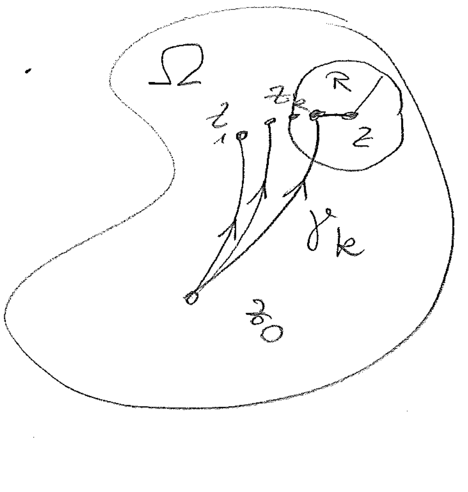
Bew.: "$\Rightarrow$" Fixiere $z_0 \in \Omega$ und definiere

$$\mathcal{U} = \{ z_1 \in \Omega ;\ \exists\, \gamma \in C^0([0,1];\Omega) : \gamma(0) = z_0,\ \gamma(1) = z_1 \}.$$

Dann gilt $z_0 \in \mathcal{U}$, also $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Da Ω offen, gibt es zu jedem $z_1 \in \mathcal{U}$ einen Ball $B_R(z_1) \subset \Omega$, und man kann einen Weg γ_{z_1} von z_0 nach z_1 durch Anhängen des Weges $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $0 \le t \le 1$, für jedes $z_2 \in B_R(z_1)$ zu einem Weg $\gamma_{z_2} = \gamma_{z_1} + \gamma$ von z_0 nach z_2 fortsetzen; es gilt also $B_R(z_1) \subset \mathcal{U}$, und $\mathcal{U}$ ist offen.

Schließlich gilt für $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ mit $z_k \xrightarrow{(k\to\infty)} z \in \Omega$ für $R > 0$ mit $B_R(z) \subset \Omega$ auch $z_k \in B_R(z)$ für genügend große $k \ge k_0$. Einen Weg γ_{z_k} von z_0 nach z_k kann man dann wie oben durch Anhängen von $\gamma(t) = z_k + t(z - z_k)$, $0 \le t \le 1$, zu einem Weg $\gamma_z = \gamma_{z_k} + \gamma$ von z_0 nach z ergänzen; $\mathcal{U}$ ist also auch (relativ) abgeschlossen in Ω.

Da Ω zshg, folgt $\mathcal{U} = \Omega$.



Analog zur Charakterisierung konservativer Kraftfelder $f = \nabla F$ mittels dem skalaren Wegintegral im $\mathbb{R}^n$ gilt folgender Satz.

<u>Satz</u> 3.1.1. Für $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ sind äquivalent:

i) $\exists\, F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$: F holomorph, $F' = f$;

ii) $\int_\gamma f(z)dz$ ist für jedes $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ nur abhängig von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$;

iii) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$.

<u>Bew.</u>: Wir zeigen i) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i).

i) $\Rightarrow$ iii) Sei $f = F'$ mit holomorphem $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$, und sei $\gamma \in C^1([0,1]; \Omega)$. Dann gilt nach der Kettenregel mit $F'(z) = dF(z)\colon \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = F'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)$$
$$= dF(\gamma(t))\, \dot\gamma(t) = \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t),$$

also $$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(t)dt = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0,$$

falls γ geschlossen. Analog für $\gamma \in C^1_{pw}$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.

Sei $-\gamma_2 \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ die Kurve mit

$$-\gamma_2(t) = \gamma_2(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dann ist $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ geschlossen,

also

$$0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

nach Annahme ii) und Bem. 3.1.1.

ii) $\Rightarrow$ i) OBdA sei Ω zusammenhängend (zshg.) (Sonst betrachte jede zshg.-Komponente.) Da Ω offen, ist Ω auch C^1-wegzshg.

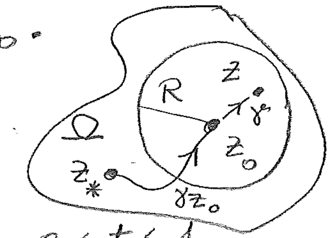
Fixiere $z_* \in \Omega$, und für $z \in \Omega$ setze

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei $\gamma_z \in C^1([0,1]; \Omega)$ ein beliebiger Weg von $\gamma_z(0) = z_*$ nach $\gamma_z(1) = z$ ist.

Nach Annahme ii) ist F wohldefiniert.

Sei nun $z_0 \in \Omega$. Da Ω offen, gibt es $R > 0$ mit $B_R(z_0) \subset \Omega$. Sei $\gamma_{z_0} \in C^1([0,1], \Omega)$ ein Weg mit $\gamma_{z_0}(0) = z_*$, $\gamma_{z_0}(1) = z_0$.



Für $z = z_0 + h \in B_R(z_0)$ ist dann

$$\gamma_z = \gamma_{z_0} + \gamma \;, \quad \gamma(t) = z_0 + th, \; 0 \le t \le 1,$$

ein Weg der Klasse C^1_{pw} von z_* nach z, und

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= F(z_0) + \int_0^1 f(z_0 + th) \cdot h \, dt .$$

Es folgt

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \int_0^1 f(z_0 + th)\, dt$$

$$\to f(z_0) \quad (h \to 0, \; h \neq 0).$$

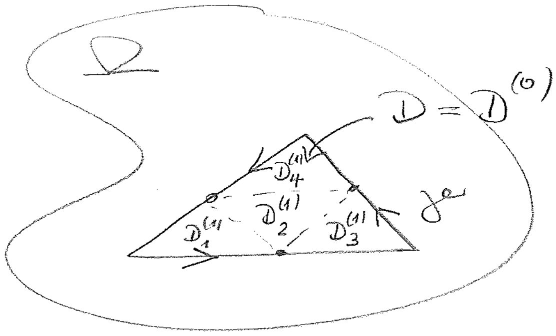
Nach Satz 2.2.3 ist F am Punkt z_0 $\mathbb{C}$-diffbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Da f stetig, ist $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph.

$\square$

Unser nächstes Ziel ist es zu beweisen, daß jede analytische Funktion $f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ lokal eine Stammfunktion besitzt. Mit Satz 3.1.1 folgt dann, daß das Wegintegral von f längs genügend kleiner geschlossener Kurven verschwindet. Letzteres läßt sich für Ränder von Dreiecken oder Rechtecken jedoch auch allein unter Benutzung der komplexen Differenzierbarkeit von f zeigen, und dies genügt, um lokal ein holomorphes F zu konstruieren mit $F' = f$, wie wir in den nächsten beiden Abschnitten sehen werden.

3.2 Der Satz von Goursat

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $D = \overline{D} \subset \Omega$ ein abg. Dreieck mit Rand ∂D. Wir können ∂D durch eine geschlossene Kurve $\gamma \in C^1_{pw}([0,1];\Omega)$ parametrisieren, wobei wir γ so orientieren, daß D beim Durchlaufen von γ stets links liegt.



Satz 3.2.1 (Goursat) Sei $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ wie oben. Falls $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ analytisch, so gilt
$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_\gamma f\,dz = 0.$$

Bew.: Nimm widerspruchsweise an, daß für ein analytisches $f \in C^0(\Omega;\mathbb{C})$ gilt:
$$I^{(0)} := \int_{\partial D} f\,dz \neq 0.$$

Unterteile $D^{(j)}$ wie im Schritt $j=1$ in 4 zu $D^{(j)}$ ähnliche Dreiecke $D_k^{(j+1)} = \overline{D_k^{(j+1)}}$ mit orientiertem Rand $\partial D_k^{(j+1)}$, wobei

$$L\left(\partial D_k^{(j+1)}\right) = \frac{1}{2} L\left(\partial D^{(j)}\right) = \frac{L(\partial D^{(0)})}{2^{j+1}}, \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Da wiederum gilt

$$I^{(j)} := \int_{\partial D^{(j)}} f\, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k^{(j+1)}} f\, dz,$$

existiert $k_{j+1} \in \{1, \dots, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\partial D_{k_{j+1}}^{(j+1)}} f\, dz \right| \geq \frac{|I^{(j)}|}{4} \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^{j+1}}.$$

Setze $\quad D^{(j+1)} := D_{k_{j+1}}^{(j+1)} \subset D^{(j)}$.

Da $D^{(j)}$ kompakt, $j \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D^{(j+1)} \subset D^{(j)} \subset \dots \subset D$, existiert $z_* \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} D^{(j)}$.

Definiere Dreiecke $D =: D^{(0)} \supset D^{(1)} \supset \ldots$ iterativ, wie folgt:

$j=1$: Die Ecken von $D = D^{(0)}$ und die Mittelpunkte der Seiten von D sind Eckpunkte von 4 Dreiecken $D_1^{(1)}, \ldots, D_4^{(1)}$ mit orientiertem Rand $\partial D_k^{(1)}$, wobei

$$L(\partial D_k^{(1)}) = \frac{1}{2} L(\partial D^{(0)}), \quad 1 \leq k \leq 4.$$

Da die Wegintegrale längs $\partial D_j^{(1)}$ und $\partial D_k^{(1)}$ längs gemeinsamer Kanten gegenläufig orientiert sind und einander aufheben, gilt

$$I^{(0)} = \int_{\partial D} f\, dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k^{(1)}} f\, dz,$$

und es gibt $k_1 \in \{1, \ldots, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\partial D_{k_1}^{(1)}} f\, dz \right| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4}.$$

Setze $D^{(1)} := D_{k_1}^{(1)}$.

$j \mapsto j+1$: Sei $D^{(j)} \subset D^{(0)}$ bereits definiert mit $L(\partial D^{(j)}) = \frac{1}{2^j} L(\partial D^{(0)})$, $\left| \int_{\partial D^{(j)}} f\, dz \right| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^j}$.

Für $z \in \Omega$ nahe z_* gilt nach Annahme

$$f(z) = f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*) + o(z - z_*),$$

wobei
$$\frac{o(z - z_*)}{|z - z_*|} \to 0 \quad (z \to z_*).$$

Mit Beispiel 3.1.1, bzw. Satz 3.1.1 folgt

$$I^{(j)} = \int_{\partial D^{(j)}} f \, dz = \underbrace{\int_{\partial D^{(j)}} f(z_*)\, dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial D^{(j)}} f'(z_*)(z - z_*)\, dz}_{=0} + R^{(j)},$$

wobei Lemma 3.1.1 die Abschätzung liefert

$$|R^{(j)}| \leq \max_{z \in \partial D^{(j)}} |f(z) - f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*)| \, L(\partial D^{(j)})$$

$$\leq o\left(L(\partial D^{(j)})\right) L(\partial D^{(j)}) = o(1)\left(L(\partial D^{(j)})\right)^2 = \frac{o(1)}{4^j}$$

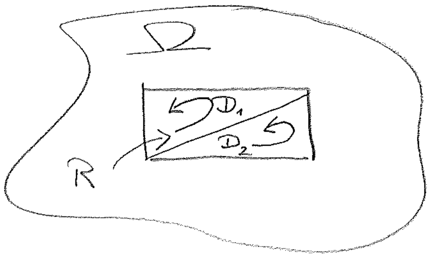
mit $o(1) \to 0$ $(j \to \infty)$. Andererseits gilt nach Konstruktion und Annahme

$$|R^{(j)}| = |I^{(j)}| \geq \frac{|I^{(0)}|}{4^j}, \quad I^{(0)} \neq 0.$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

Kor. 3.2.1: Sei $Q = \overline{Q} \subset \Omega$ ein Rechteck mit orientiertem Rand ∂Q, $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch. Dann gilt [1]

$$\int_{\partial Q} f(z)\,dz = 0.$$



Bew.: Zerlege $Q = D_1 \cup D_2$ mit Dreiecken $D_i \subset \Omega$ mit orientiertem Rand ∂D_i, $i = 1, 2$.

Dann gilt

$$\int_{\partial Q} f\,dz = \int_{\partial D_1} f\,dz + \int_{\partial D_2} f\,dz,$$

und die Behauptung folgt mit Satz 3.2.1. $\square$

Beisp. 3.2.1: Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi}\,dx\,.$$

Beachte: Quadratische Ergänzung liefert

$$e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \cdot \xi} = e^{-\pi\left(x^2 + 2 i x \cdot \xi - \xi^2 + \xi^2\right)}$$

$$= e^{-\pi (x + i\xi)^2} \cdot e^{-\pi \xi^2}.$$

---

1) Falls $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph, so folgt die Aussage auch direkt aus den Cauchy-Riemann Glgn. (2.2.1); siehe Übung 3.5.

Weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = 1 .$$

<u>Beh.:</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\, dx = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$

<u>Bew.:</u> Für $\xi, R > 0$ betrachte das Rechteck

$$Q_R = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} ;\ |x| \leq R,\ 0 \leq y \leq \xi \},$$

mit orientiertem Rand

$$\partial Q_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 ,$$

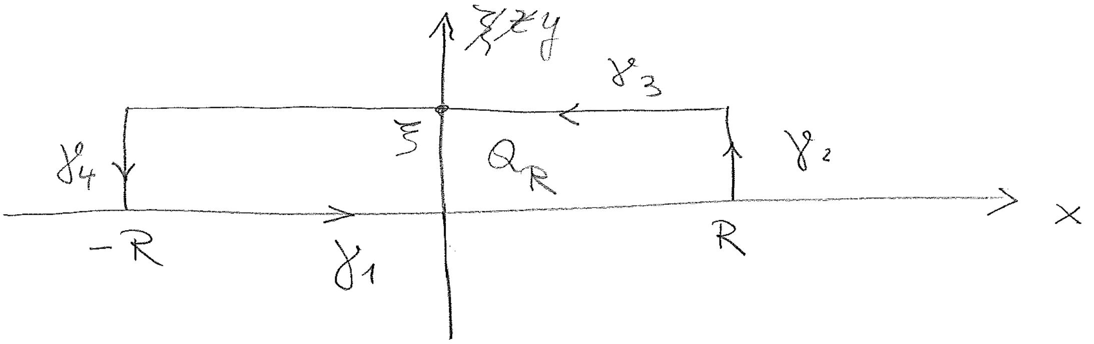
wobei

$$\gamma_1(t) = 2R\cdot t - R, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_2(t) = R + it\xi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_3(t) = R - 2Rt + i\xi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma_4(t) = -R + i(1-t)\xi, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Da die Funktion

$$f(z) = e^{-\pi z^2}$$

analytisch ist, gilt nach Kor. 3.2.1

$$0 = \int_{\partial Q_R} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \ldots + \int_{\gamma_4} f\,dz\,;$$

also

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = -\int_{\gamma_3} f\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz + \int_{\gamma_4} f\,dz$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} dx + I_2 + I_4 .$$

Mit

$$|I_{2,4}| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left| e^{-\pi(R \pm it\xi)^2} \right| \cdot \xi$$

$$= \xi \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} e^{-\pi(R^2 - t^2\xi^2)} \to 0 \ (R \to \infty).$$

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} dx = 1 ,$$

Analog für $\xi < 0$. $\square$

Es folgt:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}: \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx}_{\substack{= \text{Fourier-Transformierte } \hat{f}(\xi) \\ \text{der Funktion } f(x) = e^{-\pi x^2}.}} = e^{-\pi \xi^2}.$$

"Die Funktion $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ist ihre eigene Fourier-Transformierte."

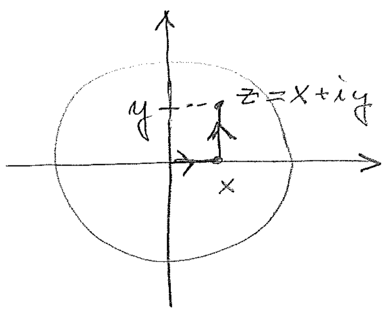
3.3 Der Cauchysche Integralsatz auf einem Ball

Betrachte $\Omega = B_R(z_*) \subset \mathbb{C}$. Der Satz von Goursat liefert das folgende Resultat.

Satz 3.3.1. Sei $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch, wobei $\Omega = B_R(z_*)$ eine Kreisscheibe. Dann existiert $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $F' = f$.

Bew.: OBdA sei $z_* = 0$. Zu $z = x + iy \in \Omega = B_R(0)$ setze

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} 2t\,x, & 0 \le t \le 1/2, \\ x + i(2t-1)\,y, & 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$



und definiere

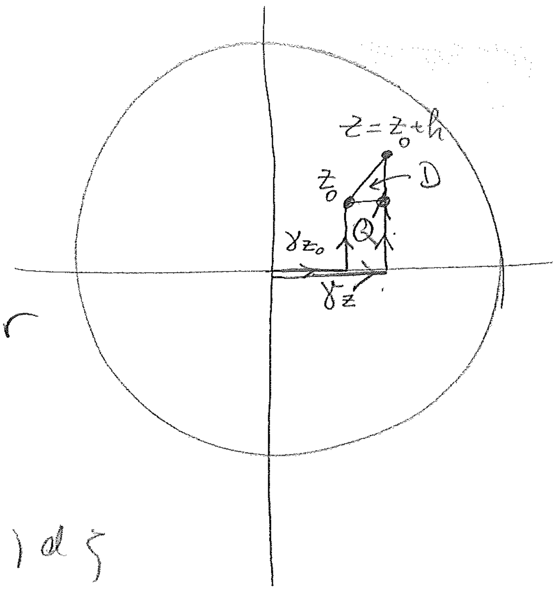
$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta .$$

Beh.: F ist an jeder Stelle $z_0 \in \Omega = B_R(0)$ $\mathbb{C}$-diffbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$.

Bew.: Sei $z_0 \in \Omega$. Für $z \in \Omega$ schreibe

$z = z_0 + h$.

Mit dem Rechteck Q und Dreieck D wie in nebenstehender Figur gilt



$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$+ \underbrace{\int_{\partial Q} f(\zeta)\,d\zeta}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial D} f(\zeta)\,d\zeta}_{=0} + \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta ,$$

wobei $\gamma(t) = z_0 + th, \quad 0 \le t \le 1.$

Mit Satz 3.2.1 und Kor. 3,2,1 folgt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \int_{\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(z_0 + th)\,dt \cdot h .$$

Nach Division durch h folgt Existenz von

$$F'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 f(z_0+th)\,dt$$

$$= f(z_0). \qquad \square$$

Der Satz folgt.

Bem. 3.3.1: Der oben angegebene Beweis ist dem Buch von Shakarchi-Stein, S. 37 f., entnommen. Studierende schlugen nach der Vorlesung die folgende, einfachere Konstruktion vor:

Zu gegebenem analytischem $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$, wo $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{C}$, und zu beliebigem $z \in \Omega$ setze

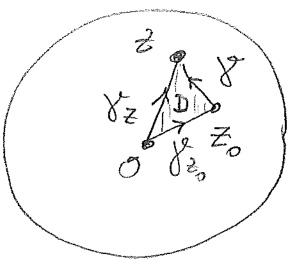
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f \, d\zeta, \quad \text{wo } \gamma_z(t) = tz, \ 0 \le t \le 1.$$

Zu festem $z_0 \in \Omega$ und beliebigem $z = z_0 + h$ bilden dann die Wege γ_{z_0}, γ_z und

$$\gamma(t) = z_0 + th, \quad 0 \le t \le 1,$$

die Seiten eines Dreiecks $D = \overline{D} \subset \Omega$ mit

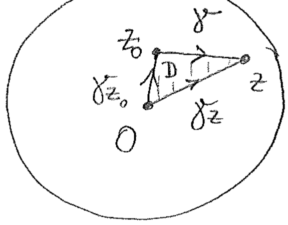
$$\pm \partial D = \gamma_z - \gamma - \gamma_{z_0},$$



und Satz 3.2.1 liefert

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f \, d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f \, d\zeta$$

$$= \underbrace{\int_{\partial D} f \, d\zeta}_{=0} + \int_{\gamma} f \, d\zeta = \int_{\gamma} f \, d\zeta$$



wie zuvor.

Als Korollar erhalten wir den Satz von Cauchy für eine Kreisscheibe.

Satz 3.3.2 (Cauchy). Sei $\Omega = B_R(z_*) \subset \mathbb{C}$, $f \in C^0(\Omega; \mathbb{C})$ analytisch, $\gamma \in C^1_{pw}([0,1]; \Omega)$ geschlossen. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Bew.: Gemäß Satz 3.3.1 existiert eine holomorphe Funktion $F \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ mit $F' = f$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 3.1.1. $\square$

Beisp. 3.3.1. Wir zeigen die Formel

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Betrachte dazu die auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}, \quad z = x+iy,$$

Für $R, \varepsilon > 0$ betrachte den halben Kreisring

$$A_{R,\varepsilon} = \{ z = x + iy ;\ \varepsilon < |z| < R,\ y > 0 \}$$

mit orientiertem Rand

$$\partial A_{R,\varepsilon} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$

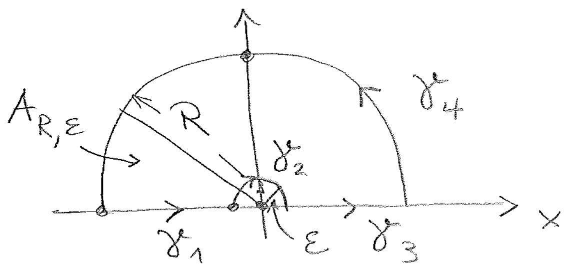
wobei

$$\gamma_1(t) = t - R, \quad 0 \le t \le R - \varepsilon,$$

$$\gamma_2(t) = \varepsilon e^{i(\pi - t)}, \quad 0 \le t \le \pi,$$

$$\gamma_3(t) = t, \quad \varepsilon \le t \le R,$$

$$\gamma_4(t) = R e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi.$$



Durch Hinzunahme von $\pm\gamma_5$ mit

$$\gamma_5(t) = it, \quad \varepsilon \le t \le R,$$

können wir $A_{R,\varepsilon} = A^-_{R,\varepsilon} \cup A^+_{R,\varepsilon}$ zerlegen in

$$A^{\pm}_{R,\varepsilon} = \{ z = x + iy \in A_{R,\varepsilon} ;\ \pm x \ge 0 \}.$$

Da $A^+_{R,\varepsilon}$, bzw. $A^-_{R,\varepsilon}$ jeweils in einem Kreis $B^\pm \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ enthalten sind, folgt mit Satz 3.3.2

$$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{\partial A^+_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{\partial A^-_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 0.$$

Mit der Abschätzung

$$|f(z)| = \frac{|1-e^{ix}\cdot e^{-y}|}{R^2} \leq \frac{2}{R^2}, \quad z = x+iy = Re^{it}$$

für $0 \leq t \leq \pi$ und Lemma 3.1.1 folgt

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2}{R^2}\underbrace{L(\gamma_4)}_{=\pi R} = \frac{2\pi}{R} \to 0 \quad (R\to\infty).$$

Mit
$$e^{iz} - (1+iz) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = -z^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(iz)^{k-2}}{k!}}_{=: E(z)},$$

wobei
$$|E(z)| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(iz)^{k-2}}{k!}\right| \leq C \text{ für } |z|\leq 1,$$

erhalten wir zudem

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2}\left(\frac{-iz}{z^2} + E(z)\right)dz = \int_0^{\pi} \frac{+i}{\varepsilon e^{i(\pi-t)}}\, i\varepsilon e^{i(\pi-t)}\,dt + O(\varepsilon)$$
$$= -\pi + O(\varepsilon) \to -\pi \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Mit Symmetrie $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \left(\int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_3} f\,dz \right)$$

$$= - \lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \downarrow 0}} \left(\int_{\gamma_2} f\,dz + \int_{\gamma_4} f\,dz \right) = \pi .$$

Das im Beispiel benutzte Zerlegungsprinzip gestattet es, Satz 3.3.2 wie folgt zu verallgemeinern.

<u>Kor.</u> 3.3.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, und sei $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ beschränkt mit $\partial U \in C^1_{pw}$. Dann gilt

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 0.$$

<u>Bew.:</u> Zerlege $U = \bigcup_{k=1}^{K} U_k$ mit Hilfe eines genügend feinen achsenparallelen Gitters in Teilgebiete U_k mit $U_k \subset \overline{U}_k \subset B_{R_k}(z_k) \subset \overline{B_{R_k}(z_k)} \subset \Omega$, und mit Rand $\partial U_k \in C^1_{pw}$, $1 \le k \le K$.

Da innere Kanten zweimal mit umgekehrter Orientierung durchlaufen werden, heben sich die entsprechenden Beiträge auf und mit Satz 3.3.2 folgt

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial U_k} f(z)\, dz = 0.$$

□

3.4 Cauchysche Integralformel

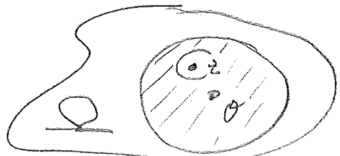
Aus Satz 3.3.2 erhalten wir eine Darstellung für f.

Satz 3.4.1. Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ eine Kreisscheibe. Dann gilt

$$\forall z \in B: \; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Bew.: OBdA sei $B = B_R(0)$. Zu gegebenem $z \in B$ und $0 < \varepsilon < R - |z|$ betrachte

$$A_{R,\varepsilon} = B_R(0) \setminus B_\varepsilon(z).$$



Beh.: $$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Bew.: Zerlege $A_{R,\varepsilon}$ mittels eines genügend feinen Gitters in Teilgebiete $A^k_{R,\varepsilon}$, $1 \le k \le K$, die jeweils in einem Ball $B_k \subset \Omega \setminus \{z\}$ enthalten sind. Da sich die Wegintegrale entlang gemeinsamer Kanten von $A^k_{R,\varepsilon}$ und $A^j_{R,\varepsilon}$ für $j \neq k$ aufheben, folgt

$$\int_{\partial A_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial A^k_{R,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

gemäß Satz 3.3.2. □

Mit Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ erhalten wir bei Wahl der Parametrisierung

$$\gamma_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

von $\partial B_\varepsilon(z)$ nun

$$\int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_\varepsilon(t))}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt \to 2\pi i f(z),$$

wie gewünscht. ☑

Es folgt, daß analytische Funktionen stets auch glatt sind. Die anfangs gemachte Unterscheidung zwischen "analytischen" und "holomorphen" Funktionen ist also unnötig.

Kor. 3.4.1 Sei $f : \Omega \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f glatt; insbesondere ist f holomorph. Genauer gilt:

i) f ist im Innern jedes Balles $B = B_R(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ beliebig oft $\mathbb{C}$-diffbar mit

$$\forall z \in B, n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta .$$

ii) f läßt sich lokal um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ durch seine Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

darstellen.

Bew.: i) (Induktion nach n). Für $n=0$ folgt die Behauptung mit Satz 3.4.1.

Nimm an, f ist n-mal $\mathbb{C}$-diffbar in B und

$$\forall z \in B: \ f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta .$$

Fixiere $z_1 \in B$. Für $z \neq z_1 \in B$ nahe z_1 gilt

$$\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_1)}{z - z_1} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} f(\zeta) \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z_1)^{n+1}}}{z - z_1} \right)}_{\xrightarrow[(z \to z_1)]{(*)} \frac{n+1}{(\zeta - z_1)^{n+2}}} d\zeta$$

Beachte, daß die Konvergenz $(*)$ gleichmäßig bzgl. $\zeta \in \partial B$ gilt. Daher kann man den Grenzübergang $z \to z_1$ mit der Integration über ∂B vertauschen, und es existiert

$$f^{(n+1)}(z_1) = \lim_{\substack{z \to z_1 \\ z \neq z_1}} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_1)}{z - z_1} = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+2}} .$$

ii) Fixiere $z_0 \in \Omega$. Für $R > 0$ mit $B = B_R(z_0) \subset \overline{B} \subset \Omega$ und $z \in B$ gilt nach Satz 3.4.1 die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \, .$$

Für $z \in B$ nahe z_0 schreibe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

und entwickle

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n .$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ und $z \in B_r(z_0)$ bei festem $0 < r < R$.

Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$

wobei wir i) benutzen. $\square$

Bem. 3.4.1. i) Mit Kor. 3.4.1. i) erhalten wir insbesondere die Cauchy-Ungleichungen

$$\forall n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! \max_{\partial B_R(z_0)} |f|}{R^n}$$

für jedes $z_0 \in \Omega$ und jedes $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$

ii) Mit den Cauchy-Ungleichungen in i) konvergiert die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n =: p(z; z_0)$$

gemäß Kor. 3.4.1. ii) absolut und gleichmäßig auf jedem Ball $B_R(z_0)$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$.

Bew.: Zu $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ gibt es $R_1 > R$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset B_{R_1}(z_0) \subset \overline{B_{R_1}(z_0)} \subset \Omega$, da Ω nach Annahme offen.

Für $z \in \overline{B_R(z_0)}$ können wir dann mit i) den Reihenrest von p abschätzen:

$$\sum_{n=j}^{k} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right| \leq \max_{\partial B_{R_1}(z_0)} |f| \sum_{n=j}^{k} \left(\frac{R}{R_1} \right)^n \xrightarrow[(j, k \to \infty)]{} 0,$$

gleichmäßig in z.

<u>Kor.</u> 3.4.2 (Identitätssatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg. und seien $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Weiter gelte für ein $z_* \in \Omega$

$$\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(z_*) = g^{(n)}(z_*).$$

Dann ist die Funktion $f-g$ konstant.

<u>Bew.:</u> OBdA sei $g \equiv 0$. (Sonst betrachte $\tilde{f} := f-g$.)

Sei

$$U = \{z \in \Omega;\ f(z) = f(z_*),\ \forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Dann gilt $U \neq \emptyset$, da $z_* \in U$. Weiter gilt gemäß Kor. 3.4.1. ii) für jedes $z_0 \in U$ und genügend kleines $r > 0$ so daß $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ auch

$$f(z) = f(z_0) \text{ für } z \in B_r(z_0),$$

also auch

$$f^{(n)}(z) = 0 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N},\ z \in B_r(z_0),$$

und U ist offen.

Schließlich folgt mit der Stetigkeit von f und $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, auch die Abgeschlossenheit von U in Ω; da Ω zslg, also $U = \Omega$. $\square$

Kor. 3.4.2 liefert nun auch die folgende Aussage.

Kor. 3.4.3 (Nullstellen sind isoliert)
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zslg, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant. Sei weiter $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) = 0$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}: f(z) \neq 0.$$

Bew.: Da nach Annahme die Menge Ω zslg. und die Funktion f nicht konstant, gibt es gemäß Kor. 3.4.2 eine kleinste Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$, und gemäß Kor. 3.4.1, ii) gilt

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^{n_0} g(z)$$

mit
$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-n_0}$$

$$= \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + O(z-z_0) \xrightarrow{(z \to z_0)} g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0;$$

also
$$|f(z)| \geq |z-z_0|^n \frac{|g(z_0)|}{2} \text{ für } 0 < |z-z_0| < \varepsilon \ll 1.$$

$\square$

Kor. 3.4.4 (Liouville). Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch. Falls $C \geq 0$ existiert mit $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Bew.: Gemäß Kor. 3.4.1.i) oder Bem. 3.4.1.i) gilt für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$, jedes $R > 0$ die Abschätzung

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \leq \frac{C}{R}.$$

Mit $R \to \infty$ folgt $f'(z_0) = 0$, also $f' \equiv 0$, und f ist konstant. $\square$

Kor. 3.4.5 (Fundamentalsatz der Algebra)
Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ein nicht konstantes Polynom. Dann hat p (mindestens) eine Nullstelle.

Bew.: (indirekt) Nimm an, es existiert

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \not\equiv p(0)$$ ohne Nullstelle.

Da p nicht konstant, gilt

$$k_1 := \max\{k;\ a_k \neq 0\} \geq 1.$$

OBdA sei $k_1 = n$, $a_n = 1$. (Sonst betrachte $\frac{p(z)}{a_n}$.)

Für $|z| \geq R \geq 1$ schätze ab

$$|p(z)| = |z|^n \left|\left(1 + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}\right)\right|$$

$$\geq R^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}| R^{-k}\right) \geq 1,$$

falls $$R = 2 \cdot \max\{1, \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}|\}.$$

Da $\overline{B_R(0)}$ kompakt, $p(z) \neq 0$ gilt

$$\delta := \min_{|z| \leq R} |p(z)| > 0.$$

Es folgt: Die holomorphe Funktion $f = \frac{1}{p}$ ist beschränkt $|f(z)| \leq \max\{1, 1/\delta\}$. Kor 3.4.4 ergibt die Beh.

□

Kor. 3.4.6 (Weierstrass) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\Omega;\mathbb{C})$ eine Folge holomorpher Funktionen mit $f_k \xrightarrow{(k\to\infty)} f$ in $C^0_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$; d.h., für jedes kompakte $K\subset\Omega$ gelte

$$\sup_{z\in K} |f_k(z)-f(z)| \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Dann ist f holomorph und $f_k^{(n)} \xrightarrow{(k\to\infty)} f^{(n)}$ in $C^0_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ für jedes $n\in\mathbb{N}$.

Bew.: Es genügt, die Aussage auf jedem Ball mit $K=\overline{K} \subset B_R(z_0) \subset \overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und für $n=1$ zu zeigen.

Mit Kor. 3.4.1. i) erhalten wir

$$\sup_{z\in K} |f_k'(z)-f_j'(z)| = \sup_{z\in K} \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f_k(\zeta)-f_j(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\Big|$$

$$\leq \sup_{z\in \overline{B_R(z_0)}} |f_k(z)-f_j(z)| \cdot \sup_{z\in K,\ \zeta\in\partial B_R(z_0)} \frac{R}{|\zeta-z|^2} \xrightarrow[(j,k\to\infty)]{} 0.$$

Also gilt $f_k' \xrightarrow{(k\to\infty)} g$ in $C^0(K;\mathbb{C})$, und mit

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{k\to\infty} \frac{f_k(z+h)-f_k(z)}{h} = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k'(z+th)\,dt = \int_0^1 g(z+th)\,dt$$

für $z\in B$, $0<|h|<\mathrm{dist}(z,\partial B)$ erhalten wir nach Grenzübergang $h\to 0$ die Gleichheit

$$f'(z) = g(z),$$

wie gewünscht. $\square$

Kor. 3.4.7 (Maximumsprinzip)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, beschränkt und zshg, $f \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$ analytisch in Ω. Dann gilt

$$M := \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|,$$

und falls für ein $z_0 \in \Omega$ gilt $|f(z_0)| = M$, so gilt $f \equiv f(z_0)$.

Bew.: Nimm an, es gibt $z_0 \in \Omega$ mit

$$|f(z_0)| = M > 0.$$

(Andernfalls ist die Behauptung richtig.)

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: f^{(n)}(z_0) = 0$.

Bew.: (indirekt) Nimm an, $f^{(n_0)}(z_0) \neq 0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und n_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Nach Kor. 3.4.1. ii) gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{n_0} g(z), \quad z \in B_R(z_0),$$

mit
$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n - n_0}, \quad z \in B_R(z_0),$$

wobei $0 < R < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Mit
$$g(z) \xrightarrow{(z\to z_0)} g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0,$$
folgt für $z = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,
$$\frac{(z-z_0)^{n_0} g(z)}{|z-z_0|^{n_0}} \cdot \overline{f(z_0)} = e^{in_0t} g(z) \overline{f(z_0)}$$
$$\xrightarrow[(r\downarrow 0)]{} e^{in_0t} g(z_0) \overline{f}(z_0).$$

Wähle $t \in [0, 2\pi]$ mit
$$c_0 := e^{in_0t} g(z_0) \overline{f}(z_0) > 0.$$

Es folgt für genügend kleine $r > 0$, $z = z_0 + re^{int}$
$$\mathrm{Re}\left(f(z)\overline{f(z_0)}\right) = |f(z_0)|^2 + r^n \mathrm{Re}\underbrace{\left(e^{in_0t} g(z) \overline{f(z_0)}\right)}_{\to c_0\ (r\downarrow 0)}$$
$$> |f(z_0)|^2,$$

also wegen
$$\mathrm{Re}\left(f(z)\overline{f(z_0)}\right) \le |f(z)|\,|f(z_0)|$$
insbesondere
$$|f(z)| > |f(z_0)|$$
im Widerspruch zu unserer Annahme. $\square$

Da Ω zshg. folgt mit

$$f^{(n)}(z_0) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

und Kor. 3.4.2 nun $f \equiv f(z_0)$,

wie gewünscht. $\square$

<u>Bem.</u> 3.4.2. Die Annahme der Beschränktheit von ist wichtig für die Aussage von Kor. 3.4.7.

Betrachte zum Beispiel die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = e^{-iz^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

auf $\Omega = \{z = x+iy \in \mathbb{C};\ x, y > 0\}$.

Es gilt $|f(z)| = 1$ auf $\partial\Omega$;

jedoch erhalten wir für $z = r(1+i)$ mit $z^2 = 2ir^2$ die Werte

$$f(z) = e^{2r^2} \longrightarrow \infty \quad (r \to \infty).$$

Hebbare Singularitäten.

Unter gewissen Annahmen kann man analytische Funktionen in isolierten Ausnahmestellen ihres Definitionsbereichs zu holomorphen Funktionen ergänzen.

<u>Satz</u> 3.4.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in C^1(\Omega \setminus \{a\}; \mathbb{C})$ holomorph mit

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Dann gibt es $\tilde{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph mit $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus \{a\}$.

<u>Bew.</u>: Sei $R > 0$ mit $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$, $z \in B_R(a) \setminus \{a\}$.

<u>Beh.</u>: Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

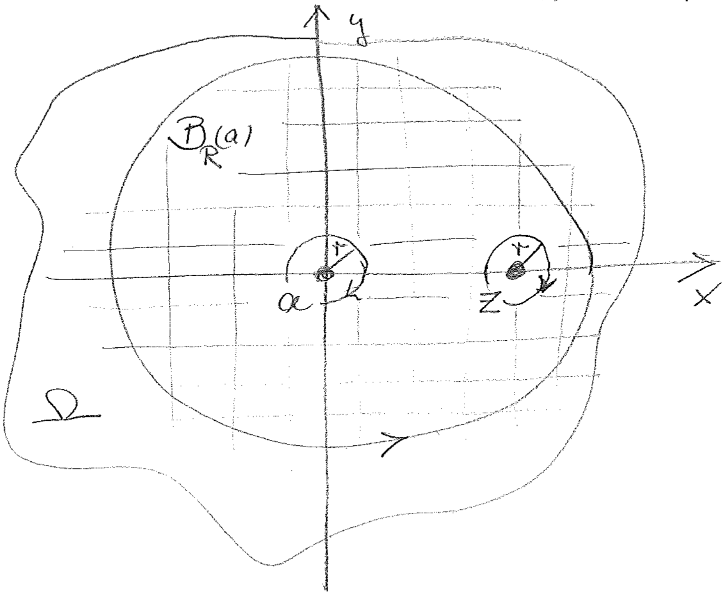
<u>Bew.</u>: Für $0 < r < \frac{1}{2} \min \{ |z-a|, R - |z-a| \}$

zerlege

$$U := B_R(a) \setminus \left(B_r(a) \cup B_r(z) \right) = \bigcup_{k=1}^{K} U_k$$

in endlich viele $U_k \subset B_{R_k}(z_k) \subset \overline{B_{R_k}(z_k)} \subset \Omega$,

mit Rand $\partial U_k \in C^1_{pw}$ wie in der Skizze



durch ein zur Achse durch a und z paralleles Gitter genügend feiner Maschenweite.

Mit Satz 3.3.2 erhalten wir

$$\int_{\partial\left(B_R(a) \setminus \left(B_r(a) \cup B_r(z)\right)\right)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial U_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

wobei $$\int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt \underset{(r \downarrow 0)}{\longrightarrow} 2\pi i f(z)$$

und $$\left| \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \max_{|\zeta - a| = r} \frac{2\pi r |f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \overset{*)}{\leq} \frac{4\pi}{|z-a|} \max_{|\zeta - a| = r} |(\zeta - a) f(\zeta)| \longrightarrow 0 \quad (r \downarrow 0).$$

---

*) $|\zeta - z| \geq \underbrace{|z-a|}_{\geq 2r} - \underbrace{|\zeta - a|}_{= r} \geq \frac{|z-a|}{2}$ für $\zeta \in \partial B_r(a)$. □

Die Funktion $\tilde{f}: \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \,, \quad z \in B_R(a),$$

und $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus B_R(a)$ erfüllt also $\tilde{f} = f$ auf $\Omega \setminus \{a\}$, und $\tilde{f}$ ist holomorph auf Ω.

$\square$

Als eine erste Anwendung dieses Satzes beweisen wir die folgende Aussage.

<u>Satz</u> 3.4.3 (Das Schwarzsche Lemma)
Sei $B = B_1(0)$, $f : B \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in B$.

Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1, \quad \forall z \in B : |f(z)| \leq |z|,$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B$, so ist $f(z) = cz$ linear, wobei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Bew.: Die Funktion $g: B \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in B \setminus \{0\}, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

ist stetig und auf $B \setminus \{0\}$ analytisch.
Gemäß Satz 3.4.2 ist g holomorph auf ganz B.
Weiter gilt nach Voraussetzung

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{|z|}, \quad z \in B \setminus \{0\};$$

also mit dem Maximumprinzip (Kor. 3.4.7) für jedes $0 < r < 1$

$$\sup_{z \in B_r(0)} |g(z)| \leq \sup_{z \in \partial B_r(0)} |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Nach Grenzübergang $r \uparrow 1$ ergibt dies die Ungleichung $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in B$, also

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1, \quad |f(z)| \leq |z|, \quad z \in B.$$

Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in B$, so gilt $|g(0)| = 1$, bzw. $|g(z)| = 1$ für ein $z \in B$, und $g \equiv c \in \mathbb{C}$ nach Kor. 3.4.7. □

Kor. 3.4.8. Sei $f : B = B_1(0) \subset \mathbb{C} \to B$ analytisch. Dann gelten für alle $z, z_0 \in B$ die Ungleichungen

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}\, f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}\, z} \right|$$

sowie

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} .$$

Bew.: Fixiere $z_0 \in B$, $w_0 = f(z_0) \in B$. Die Möbiustransformationen S und T mit

$$S(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}\, w} , \quad T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}\, z}$$

definieren biholomorphe Abbildungen $S, T : B \to B$. mit $S(w_0) = 0 = T(z_0)$. Die Funktion

$$\tilde{f} = S \circ f \circ T^{-1} : B \to B$$

ist dann analytisch mit $\tilde{f}(0) = 0$, und $|\tilde{f}(z)| \leq 1$ für alle $z \in B$, da $\tilde{f}(B) \subset B$.

Mit Satz 3.4.3 folgt nun

$$\forall z \in B: \quad |\tilde{f}(z)| \leq |z|;$$

also auch

$$\forall z \in B: \left|\tilde{f}(T(z))\right| \leq |Tz| = \left|\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right|.$$

Mit

$$\tilde{f}(T(z)) = \frac{f(z) - w_0}{1 - \bar{w}_0 f(z)} = \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}\, f(z)}$$

folgt die erste Behauptung.

Teilen durch $z - z_0$ für $z \neq z_0$ und Grenzübergang $z \to z_0$ ergibt die zweite behauptete Ungleichung.

$\square$

Mit Korollar 3.4.8 erhalten wir die folgende überraschende Charakterisierung biholomorpher Transformation von $B = B_1(0)$.

Kor. 3.4.9. Sei $f: B \to B$ biholomorph. Dann gibt es $z_0 \in B$ und $\theta \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad z \in B.$$

Bew.: Wenden wir Kor. 3.4.8 sowohl für f als auch für f^{-1} an, so folgt

$$\forall z, z_0 \in B: \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|.$$

Wählen wir $z_0 \in B$ so, daß $f(z_0) = 0$,

$$T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad z \in B,$$

wie im Beweis von Kor. 3.4.8, so erfüllt $\tilde{f} = f \circ T^{-1}$ die Gleichung

$$|\tilde{f}(T(z))| = |f(z)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| = |T(z)|, \quad z \in B,$$

also

$$\tilde{f}(z) = e^{i\theta} z, \quad z \in B,$$

für ein $\theta \in \mathbb{R}$, und

$$f(z) = \tilde{f}(T(z)) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad z \in B.$$

$\square$

Bem. 3.4.3: Mit Kor. 3.4.9 folgt, daß die biholomorphen Abbildungen der Kreisscheibe eine von 3 reellen Parametern bestimmte Familie von Möbiustransformationen bilden, die Möbiusgruppe.