

4. Residuenkalkül

4.1 Pole und wesentliche Singularitäten

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, und sei
 $f: \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Def. 4.1.1. Die Stelle $a \in \Omega$ heißt

i) hebbare Singularität, falls

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0;$$

ii) Pol von f , falls

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty;$$

iii) wesentliche Singularität von f , andernfalls.

Bem. 4.1.1. Falls $a \in \Omega$ eine hebbare
Singularität von f ist, so können wir
gemäß Satz 3.4.2 die Funktion f zu einer
holomorphen Funktion $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen.

Beisp. 4.1.1. i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{C}$

hat die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\},$$

einen Pol an der Stelle a .

ii) Seien $p, q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynome ohne gemeinsame Nullstellen, $f = p/q: \mathbb{C} \setminus Z \rightarrow \mathbb{C}$,

wo

$$Z = \{z \in \mathbb{C}; q(z) = 0\}.$$

Dann hat f an jeder Stelle $a \in Z$ einen Pol.

Bew.: Da nach Annahme $p(z) \neq 0$ für jedes $z \in Z$, gilt für jedes $a \in Z$:

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow a} \frac{|p(z)|}{|q(z)|} = \infty.$$

iii) Die Funktion $f(z) = \exp(1/z)$, $z \in \mathbb{C}$, hat an der Stelle $a = 0$ eine wesentliche Singularität.

Bew.: Es gilt (für $z = x + iy \in \mathbb{C}$):

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty \neq \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0.$$

Das Verhalten von f bei einer Polstelle $a \in \Omega$ kann man durch Betrachten der holomorphen Funktion $h = \frac{1}{f} : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$, $0 < r < 1$, sehr leicht vollständig charakterisieren, da mit

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$$

folgt, daß gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} h(z) = 0,$$

womit die Singularität $a \in \Omega$ von h hebbbar ist und sich h zu einer holomorphen Funktion in einer Umgebung von a fortsetzen läßt, für die die Cauchy'sche Integraldarstellung sowie die Darstellung als Potenzreihe gemäß Satz 3.4.1 und Kor. 3.4.1 gültig sind.

Auf diesem Weg erhält man den folgenden Satz.

Satz 4.1.1: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$,

$f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol
an der Stelle z_0 . Dann gilt:

i) Es gibt genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine
holomorphe Funktion $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$,

so daß

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}, \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\}.$$

ii) Es gibt $b_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n_0$, mit $b_{n_0} \neq 0$,
wobei n_0 wie in i), und eine holomorphe
Funktion $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, so daß

$$f(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z), \quad z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

und

iii) für $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ gilt

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Def. 4.1.2. Die Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ in Satz 4.1.1
heißt Ordnung der Polstelle z_0 .

Bew.: i) Da $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow z_0$,
existiert $r > 0$ mit

$$\forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}: |f(z)| \geq 1.$$

Die Funktion $h = \frac{1}{f} : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$
ist holomorph und beschränkt. Nach
Satz 3.4.2 läßt sich h zu einer holomorphen
Funktion h auf ganz $B_r(z_0)$ fortsetzen mit

$$h(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Da somit h nicht konstant ist, $B_r(z_0)$ zshg,
existiert nach Kor. 3.4.2 ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$

mit $h^{(n_0)}(z_0) \neq 0$,

und nach Kor. 3.4.1 können wir h entwickeln

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$= (z - z_0)^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n - n_0}$$

$$=: (z - z_0)^{n_0} l(z)$$

mit

$$l(z) := \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0}.$$

Nach Bem. 3.4.1, ii) konvergiert die Potenzreihe l lokal gleichmäßig in $\mathcal{D}_r(z_0)$ mit $l(z_0) = h^{(n_0)}(z_0)/n_0! \neq 0$.

Die Funktion $g = 1/l$ mit

$$g(z) = \frac{1}{l(z)} = \frac{(z-z_0)^{n_0}}{h(z)} = (z-z_0)^{n_0} f(z)$$

ist dann holomorph in \mathcal{D} mit $g(z_0) \neq 0$, und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}.$$

ii) Entwickeln wir

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

gemäß Kor. 3.4.1, so folgt

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z-z_0)^{n_0}} + \frac{g'(z_0)}{(z-z_0)^{n_0-1}} + \dots + \frac{g^{(n_0-1)}(z_0)}{(n_0-1)! (z-z_0)} + \phi(z)$$

mit

$$\phi(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0},$$

wie gewünscht.

iii) Schließlich gilt nach Satz 3.4.1

für $z \neq z_0 \in B_r(z_0)$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \sum_{n=1}^{n_0} I_n,$$

wobei mit $b_n = g^{(n_0-n)}(z_0)/(n_0-n)!$ gilt

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{b_n}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} d\zeta, \quad 1 \leq n \leq n_0.$$

Beh.: $I_n = 0$, $1 \leq n \leq n_0$.

Bew.: Für $z \in B_r(z_0)$, $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ schreibe

$$\zeta - z = \zeta - z_0 + z_0 - z = (\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right).$$

Beachte, daß $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$,

gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_r(z_0)$. Somit
können wir entwickeln

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} &= \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1+n}}. \end{aligned}$$

Da $n \geq 1$, hat für jedes $k \geq 0$ die
Funktion

$$p(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1+n}}$$

die Stammfunktion $P(\zeta) = -\frac{1}{k+n} \cdot \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k+n}}$,

und $I_n = 0$ gemäß Satz 3.1.1.

□

Sei $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung n_0 an der Stelle z_0 .

mit

$$(4.1.1) \quad f(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z)$$

wie in Satz 4.1.1. ii).

Def. 4.1.3. Die Summe

$$P(z) = \frac{b_{n_0}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

heißt Hauptteil von f an der Polstelle z_0 ,

$$b_1 =: \operatorname{res}_{z_0} f$$

heißt das Residuum von f an dieser Stelle,

Bem. 4.1.2, i) Da alle Terme außer dem Term $\frac{b_1}{z-z_0}$ in der Entwicklung (4.1.1) von f Stammfunktionen besitzen, gilt nach den Sätzen 3.1.1, 3.3.2 und 3.4.1 für $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(z) dz \stackrel{(\text{Satz 3.1.1 u. 3.3.2})}{=} \frac{b_1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{dz}{z-z_0} \stackrel{(\text{Satz 3.4.1})}{=} b_1 = \operatorname{res}_{z_0} f.$$

ii) Weitere Darstellungen des Residuums erhält man durch Multiplikation

$$(z-z_0)^{n_0} f(z) = b_{n_0} + b_{n_0-1}(z-z_0) + \dots + b_1(z-z_0)^{n_0-1} + (z-z_0)^{n_0} \phi(z).$$

Es folgt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{1}{(n_0-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n_0-1} \left((z-z_0)^{n_0} f(z) \right).$$

iii) Insbesondere, falls

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + \phi(z)$$

bei z_0 eine einfache Polstelle (mit $n_0=1$) besitzt, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = b_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} (z-z_0) f(z).$$

iv) Umgekehrt folgt aus der Existenz von

$$b_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} (z-z_0) f(z)$$

mit $b_1 \neq 0$, daß f bei z_0 einen Pol der Ordnung $n_0=1$ hat mit $b_1 = \operatorname{res}_{z_0} f$. Wegen

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} (z-z_0) \left(f(z) - \frac{b_1}{z-z_0} \right) = 0$$

hat dann nämlich $\phi(z) := f(z) - \frac{b_1}{z-z_0}$ eine hebbare Sing. bei z_0 .

Falls die holomorphe Funktion f mehr als eine Polstelle besitzt, können wir Bem. 4.1.2.i) wie folgt verallgemeinern.

Satz 4.1.2 (Residuensatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1, \dots, z_K \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_k; 1 \leq k \leq K\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit Polstellen bei z_k , $1 \leq k \leq K$.

Dann gilt für jeden Kreis $B = B_R(z_0)$, $R > 0$, mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ und mit $\partial B_R(z_0) \subset \Omega \setminus \{z_k; 1 \leq k \leq K\}$

die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} f(z) dz = \sum_{k: z_k \in B_R(z_0)} \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Bew.: O.B.d.A. gelte $z_k \in B_R(z_0)$, $1 \leq k \leq K$.

Für genügend kleine $r > 0$ und

$$U = B_R(z_0) \setminus \bigcup_{k=1}^K B_r(z_k)$$

gilt analog zum Beweis von Satz 3.4.2

$$0 = \int_{\partial U} f(z) dz = \int_{\partial B_R(z_0)} f(z) dz - \sum_{k=1}^K \int_{\partial B_r(z_k)} f(z) dz,$$

und
$$\int_{\partial B_r(z_k)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_k} f, \quad 1 \leq k \leq K,$$

gemäß Bem. 4.1.2. □

Beisp. 4.1.2. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \stackrel{(y=\arctan x)^{\pi/2}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy = \pi$$

mittels Residuensatz, wie folgt.

Betrachte

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

mit einfachen Polen bei $z = \pm i$ und

$$\operatorname{res}_{\{z=i\}} f = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \frac{1}{2i},$$

und für $0 < r \ll 1 \ll R$ betrachte

$$U = U_{R,r} = \mathbb{B}_R^+(0) \setminus \mathbb{B}_r(i),$$

wobei $\mathbb{B}_R^+(0) = \{z = x+iy; |z| < R, y > 0\}$.

Wiedersum zeigt eine Zerlegung $U = \bigcup_{k=1}^K U_k$
mittels einem genügend feinem, achsenparallelen
Gitter, so daß $U_k \subset \mathbb{B}_{r_k}(z_k) \subset \overline{\mathbb{B}_{r_k}(z_k)} \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$,
 $1 \leq k \leq K$, daß gilt

$$\int_{\partial U} f(z) dz = \sum_{k=1}^K \int_{\partial U_k} f(z) dz = 0.$$

Andererseits gilt

$$\int_{\partial U} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{\partial B_r(i)} f(z) dz,$$

wobei $\gamma_R(t) = R e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

Mit

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} = \frac{1}{R^2 - 1}, \quad |z| = R,$$

folgt

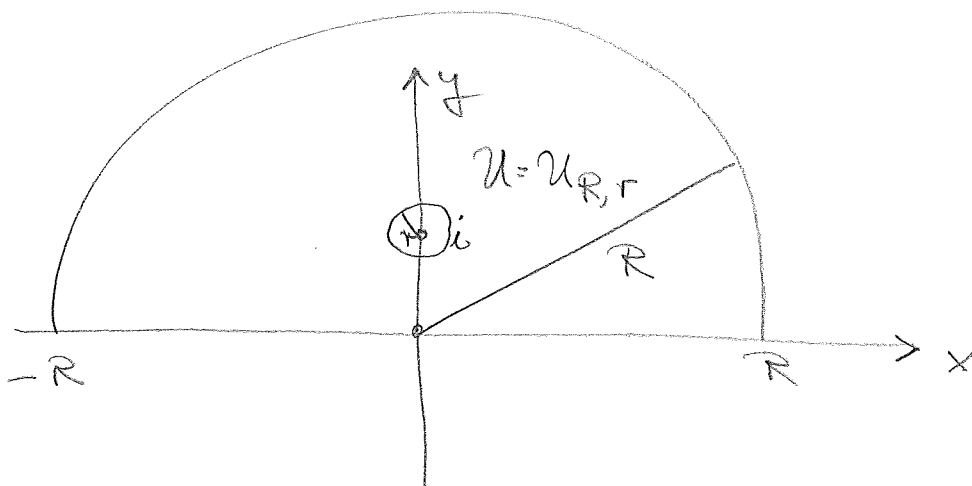
$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \max_{|z|=R} |f(z)| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0; \quad (R \rightarrow \infty)$$

weiter gilt nach Bem. 4.1.2.i) für $0 < r < 2$:

$$\int_{\partial B_r(i)} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}_{\{z=i\}} f = \pi.$$

Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \pi.$$



Beisp. 4.1.3. Sei $0 < a < 1$. Wir zeigen

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Betrachte dazu

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i(\pi + 2\pi k); k \in \mathbb{Z}\},$$

und die Gebiete

$$U = U_{R,r} = \{z = x + iy; |x| < R, 0 < y < 2\pi\} \setminus B_r(i\pi)$$

für $0 < r \ll 1 \ll R < \infty$. Wieder gilt

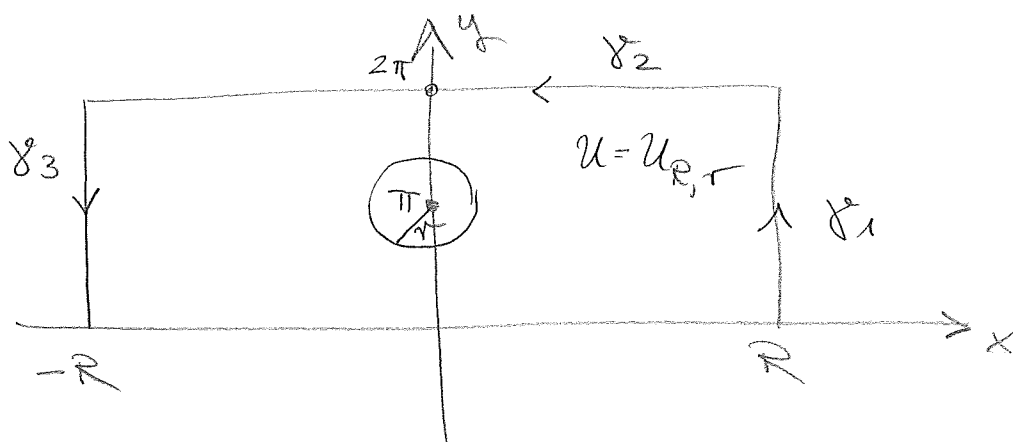
$$0 = \int_{\partial U} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\partial B_r(i\pi)} f(z) dz,$$

wo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit

$$\gamma_1(t) = R + it, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\gamma_2(t) = R - t + 2\pi i, \quad 0 \leq t \leq 2R,$$

$$\gamma_3(t) = -R + i(2\pi - t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Mit

$$|f(z)| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \leq 2e^{(a-1)R} \rightarrow 0, \quad z=R+iy, \quad (\log 2 \leq R \rightarrow \infty)$$

folgt $\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq 4\pi e^{(a-1)R} \rightarrow 0$
($\log 2 \leq R \rightarrow \infty$)

Analog folgt mit

$$|f(z)| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \leq 2e^{-aR} \rightarrow 0, \quad z=-R+iy \quad (\log 2 \leq R \rightarrow \infty)$$

die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma_3} f(z) dz \right| \leq 4\pi e^{-aR} \rightarrow 0, \quad (\log 2 \leq R \rightarrow \infty)$$

Weiter gilt

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{2\pi ia} \cdot e^{ax}}{1 + e^x} dx \rightarrow -e^{2\pi ia} I; \quad (R \rightarrow \infty)$$

also

$$(1 - e^{2\pi ia}) I = \int_{\partial B_r(i\pi)} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\{z=i\pi\}} f$$

Mit Beem. 4.1.2. iii) erhalten wir

$$\operatorname{res}_{\{z=i\pi\}} f = \lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) f(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow i\pi} e^{az} \frac{z - i\pi}{e^z - e^{i\pi}} = \frac{e^{i\pi a}}{\exp'(i\pi)} = -e^{i\pi a}$$

also

$$I = - \frac{2\pi i e^{i\pi a}}{1 - e^{2\pi i a}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Satz 4.1.1 liefert eine nahezu vollständige Beschreibung einer holomorphen Funktion in der Umgebung einer Polstelle.

Das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist davon radikal verschieden, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.1.3 (Casarati-Weierstrass). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität an der Stelle $z_0 \in \Omega$.

Dann gilt

$$\forall r > 0 : \overline{f(\mathbb{B}_r(z_0) \cap \Omega)} = \mathbb{C}.$$

Bew.: (indirekt). Nimm an, es gibt $w_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$

mit $\delta := \inf \{ |f(z) - w_0|; z \in \mathbb{B}_r(z_0) \cap \Omega \} > 0$.

Die Funktion $g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$, $z \in \mathbb{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, ist dann holomorph und beschränkt. Nach

Satz 3.4.2 können wir g zu einer holomorphen Funktion $g: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen, und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \\ = (z-z_0)^{n_0} h(z)$$

mit minimalem $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und holomorphem

$$h(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0}$$

gemäß Kor. 3.4.1.ii), mit $h(z_0) \neq 0$.

Es folgt

$$f = w_0 + \frac{1}{g} \text{ in } B_r(z_0) \setminus \{z_0\},$$

und f hat eine hebbare Singularität an der Stelle z_0 , falls $n_0=0$, bzw. einen Pol der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, falls $n_0 > 0$.

Beide Fälle widersprechen jedoch unserer Annahme, daß z_0 wesentliche Singularität ist. \square

Bem. 4.1.3. Gemäß einem tief liegenden Satz von Picard gilt für holomorphe $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei z_0 sogar, daß mit Ausnahme allenfalls eines einzigen Punktes $w_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion f jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ in jeder Umgebung $B_r(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}$, $r > 0$, annimmt.

Beisp. 4.1.4. Die Funktion $f(z) = \exp(1/z)$, $z \neq 0$, hat bei $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, und es gilt

$$\forall r > 0 : f(B_r(0) \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Trotz des in Satz 4.1.3 hervortretenden Unterschiedes zwischen Polstellen und wesentlichen Singularitäten führt die im Beweis vom Cauchyschen Darstellungssatz (Satz 3.4.1) und von Kor. 3.4.1 zu einer dem Hauptteil einer holomorphen Funktion mit Polstelle ähnlichen Darstellung im Falle einer wesentlichen Singularität.

Satz 4.1.4 (Laurent-Reihenentwicklung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$. Dann gibt es Koeffizienten $a_n, n \in \mathbb{Z}$, so daß für jedes $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei die Reihe lokal gleichmäßig in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ absolut konvergiert.

Im Falle, daß f bei z_0 eine Polstelle hat der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, gilt zudem $a_n = 0$ für $n < n_0$.

Bew.: Sei $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, und seien $r > 0$,
 $\varepsilon > 0$ mit $z \in A_{R,r}(z_0) := B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$, $B_{2\varepsilon}(z) \subset A_{R,r}(z_0)$.
 Für $U := A_{R,r}(z_0) \setminus B_\varepsilon(z)$ gilt gemäß Kor. 3.3.1

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

gemäß Satz 3.4.1. Es folgt:

$$\forall z \in A_{R,r}(z_0): f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Entwickle man für $|z - z_0| < R = |\zeta - z_0|$, $\zeta \in \partial B_R(z_0)$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

in eine gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ und lokal
 gleichmäßig in $z \in A_{R,r}(z_0)$ absolut konvergente Reihe.

Ebenso erhalten wir für $|\zeta - z_0| = r < |z - z_0|$
 die gleichmäßig in $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ und lokal
 gleichmäßig in $z \in A_{R,r}(z_0)$ absolut konvergente
 Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Vertauschen von Summation und Integration ist
 daher möglich und ergibt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta \cdot (z - z_0)^{-n-1} \right),$$

wobei $a_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta$, $n \in \mathbb{N}_0$,

gemäß Kor. 3.3.1 unabhängig ist von $0 < r < R$.

Falls z_0 Polstelle von f ist der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$,
 so folgt mit der Darstellung $f(z) = g(z)/(z - z_0)^{n_0}$
 gemäß Satz 4.1.1. i) und Satz 3.3.2 für $n \geq n_0$

$$\int_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta = \int_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-n_0} d\zeta = 0,$$

da $G_n(z) = g(z)(z - z_0)^{n-n_0}$ holomorph in $B_r(z_0)$, $n \geq n_0$. □

4.2 Meromorphe Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen.

Def. 4.2.1. f ist meromorphe Funktion auf Ω , falls es eine höchstens abzählbare Menge von Punkten $(z_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \Omega$ ohne Häufungspunkt in Ω gibt mit

- i) $f: \Omega \setminus \{z_k; k \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph;
- ii) f hat eine Polstelle bei $z_k, k \in \mathbb{N}_0$.

Bem. 4.2.1.i) Führen wir auf $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Topologie $\tau_{\overline{\mathbb{C}}}$ ein der Mengen \mathcal{U} mit

- a) $\infty \notin U \Rightarrow U \subset \mathbb{C}$ offen,
- b) $\infty \in U \Rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ ist kompakt,

so sind meromorphe Funktionen f auf Ω stetige Funktionen $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

ii) Bezüglich der Topologie $\tau_{\overline{\mathbb{C}}}$ ist $\overline{\mathbb{C}}$ überdeckungskompakt.

Der Fall $\Omega = \mathbb{C}$ ist von besonderem Interesse.

Def. 4.2.2. Eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine ganze Funktion.

Das Verhalten im Unendlichen kann man durch Betrachten von

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

analog zu Def. 4.1.1 klassifizieren.

Def. 4.2.3. Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt meromorph auf $\overline{\mathbb{C}}$, falls für ein $R > 0$ gilt:

- i) $f|_{\overline{B_{2R}(0)}}: \overline{B_{2R}(0)} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist meromorph;
- ii) $f|_{\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)}}: \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

und

- iii) $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right): B_{1/R}(0) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ hat eine hebbare Singularität oder einen Pol an der Stelle $z_0 = 0$.

Bem. 4.2.2.i) Im Falle von einer meromorphen Funktion $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ wie in Def. 4.2.3 sprechen wir dann von einer hebbaren Singularität oder einer Polstelle im Unendlichen, je nachdem, ob $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität oder eine Polstelle der Funktion $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ ist.

ii) Mit der in Bem. 4.2.1 eingeführten Topologie ist eine meromorphe Funktion $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ stetig.

Meromorphe Funktionen $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ lassen sich wie folgt klassifizieren.

Satz 4.2.1. Sei $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist f rational; d.h., $f = p/q$ mit Polynomen $p, q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Bew.: Da f nach Definition außerhalb eines genügend großen Balles $B_R(0)$ holomorph, gibt es höchstens endlich viele Polstellen $z_0, \dots, z_K \in \mathbb{C}$ von f .

Mit Satz 4.1.1 erhalten die Darstellung

$$f(z) = \frac{b_{n_0}^{(0)}}{(z-z_0)^{n_0}} + \dots + \frac{b_1^{(0)}}{z-z_0} + f_0(z)$$

mit einer meromorphen Funktion $f_0: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit Polstellen $z_1, \dots, z_K \in \mathbb{C}$. Durch Iteration erhalten wir

$$f(z) = \sum_{k=0}^K \left(\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \dots + \frac{b_1^{(k)}}{z-z_k} \right) + f_K(z)$$

mit einer meromorphen Funktion f_K mit noch höchstens einem Pol bei Unendlich.

Für $F_K(z) = f_K\left(\frac{1}{z}\right)$

liefert wiederum Satz 4.1.1 die Darstellung

$$F_K(z) = \frac{b_{n_\infty}^{(\infty)}}{z^{n_\infty}} + \dots + \frac{b_1^{(\infty)}}{z} + G(z),$$

wobei $G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, also

$$g(z) = G\left(\frac{1}{z}\right) = f_K(z) - \frac{b_1^{(\infty)}}{z} - \dots - \frac{b_{n_\infty}^{(\infty)}}{z^{n_\infty}}$$

holomorph und beschränkt.

Mit Kor. 3.4.4 (Liouville) folgt $g \equiv b_0^{(\infty)} \in \mathbb{C}$,

also

$$f(z) = \sum_{k=0}^K \left(\frac{b_{n_k}^{(k)}}{(z-z_k)^{n_k}} + \dots + \frac{b_1^{(k)}}{z-z_k} \right) \\ + b_0^{(\infty)} + \frac{b_1^{(\infty)}}{z} + \dots + \frac{b_{n_\infty}^{(\infty)}}{z^{n_\infty}}$$

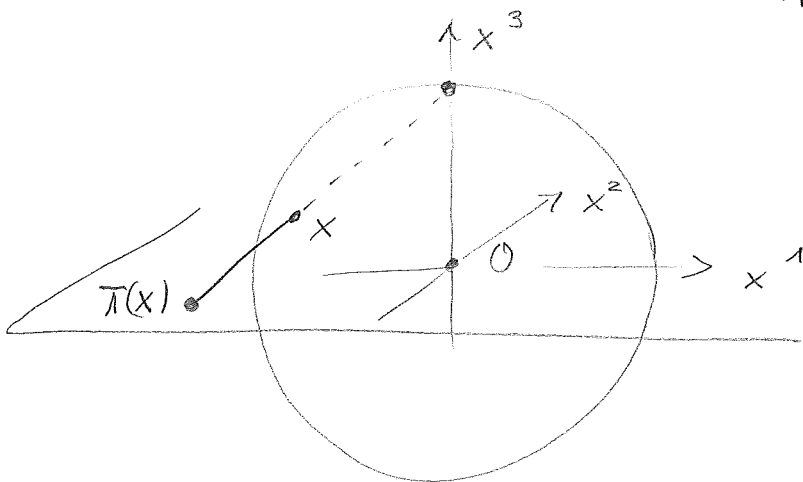
rational.

□

Die Riemannsche Zahlenkugel, mittels der stereographischen Projektion

$$\pi: S^2 = \{x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

$$(4.2.1) \quad x \mapsto z = \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3}$$



mit der Inverse

$$\Phi: \mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix} \in S^2,$$

stetig im Punkt $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ ergänzt durch

$$\Phi(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \in S^2,$$

können wir die erweiterte komplexe Ebene mit der Standardsphäre identifizieren, und π, Φ sind stetig bzgl. der in Bem. 4.2.1 eingeführten Topologie $\tau_{\overline{\mathbb{C}}}$.

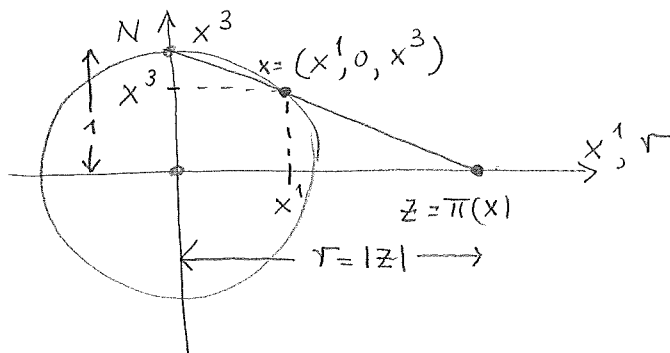
Für eine meromorphe Funktion
 $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist dann die
 induzierte Funktion

$$\tilde{f} = \Phi \circ f \circ \pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

stetig.

"Die Riemann-Sphäre \mathbb{S}^2 ist die
 1-Punkt-Kompaktifizierung von \mathbb{C} ."

Bem. 4.2.3: Die Formel (4.2.1) erhält
 man mittels Strahlensatz.



Mit

$$r = \frac{r}{1} = \frac{r - x^1}{x^3}, \quad r(1 - x^3) = x^1$$

folgt (4.2.1) für $x^2 = 0, x^1 > 0$. Weiter folgt
 mit $x^1 = \sqrt{1 - |x^3|^2}$ hieraus $r^2 = \frac{1 - |x^3|^2}{(1 - x^3)^2} = \frac{1 + x^3}{1 - x^3}$

und

$$1 + r^2 = \frac{2}{1 - x^3}, \quad \text{also } x^1 = \frac{2r}{1 + r^2}, \quad x^3 = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}.$$

4.3 Das Argumentprinzip.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph,
 $z_0 \in \Omega$ mit $f(z_0) \neq 0$.

Für $z \in \Omega$ nahe bei z_0 ist dann

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$$

bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ erklärt.

Treffen wir eine Wahl für $\arg f(z)$, so

können wir durch die Forderung der Stetigkeit

für genügend kleine $r > 0$ eine holomorphe

Funktion $\phi: \Omega \cap B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ erklären mit

$$\phi(z) = \log f(z), \quad z \in \Omega \cap B_r(z_0),$$

und

$$\phi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \Omega \cap B_r(z_0),$$

ist unabhängig von der Wahl des Arguments von $f(z)$.

Bew. 4.3.1. i) Falls $f_1, f_2: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
so gilt

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2};$$

analog für $f_1, \dots, f_n: \Omega \xrightarrow{\text{holom.}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Obwohl
also für den (Hauptzweig des) Logarithmus
im Allgemeinen das Additionstheorem

$$\log(f_1 f_2) = \log f_1 + \log f_2$$

nicht gilt, verhält sich die logarithmische
Ableitung so, als wäre dies der Fall.

ii) Falls f an der Stelle z_0 einen
Pol hat der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}, \quad z \in \Omega, z \neq z_0,$$

mit einer holomorphen Funktion $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
mit $g(z_0) \neq 0$, so gilt gemäß i) für $0 < r < 1$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n_0}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in \mathbb{B}_r(z_0) \cap \Omega \setminus \{z_0\}.$$

iii) Analog erhalten wir für

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$$

mit einer Nullstelle der Ordnung $n_0 \in \mathbb{N}$
bei $z_0 \in \Omega$ und einer holomorphen Funktion
 $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad z \in B_r(z_0) \cap \Omega, z \neq z_0,$$

für $r > 0$ mit $g(z) \neq 0$ auf $B_r(z_0) \cap \Omega$.

Zusammen mit Satz 4.1.2 liefert Bem. 4.3.1
das folgende Ergebnis.

Satz 4.3.1 (Argumentprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen,
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph, und sei U beschränkt
mit $\bar{U} \subset \Omega$ und so, daß f weder Polstellen
noch Nullstellen auf ∂U besitzt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z_k \in U \\ \text{ist Nullstelle von } f \\ \text{der Ordnung } n_k \in \mathbb{N}}} n_k - \sum_{\substack{z_j \in U \\ \text{ist Polstelle von } f \\ \text{der Ordnung } m_j}} m_j.$$

Bew.: Für $0 < r \ll 1$ betrachte

$$U_r = U \setminus \bigcup_{z_k \in Z} B_r(z_k),$$

wobei

$$Z = \left\{ z_0 \in U; f(z_0) = 0 \text{ oder } \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} |f(z)| = \infty \right\},$$

Da $F := f'/f$ in einer Umgebung von U_r holomorph ist, gilt gemäß Kor. 3.3.1

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \sum_{z_k \in Z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_k)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

und gemäß Satz 4.1.2 und Bem. 4.3.1 gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_k)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_k \in \mathbb{Z},$$

falls z_k Nullstelle der Ordnung n_k , bzw. Polstelle der Ordnung $-n_k$ ist, und falls $r > 0$ so klein gewählt ist, daß

$g(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}; B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ wie in Bem. 4.3.1 holomorph ist in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$. \square

Satz 4.3.2 (Rouché) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen,
 $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und für $B = B_{\mathbb{R}}(z_0)$
 mit $\overline{B} \subset \Omega$ gelte

$$\forall z \in \partial B: |f(z)| > |g(z)|.$$

Dann haben f und die Funktion $f+g$
 dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität)
 in B .

Bew.: Für $0 \leq t \leq 1$ betrachte

$$f_t(z) = f(z) + tg(z), \quad z \in \Omega.$$

Mit $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ für $z \in \partial B$ folgt

$$\forall z \in \partial B: |f_t(z)| > 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

und gemäß Satz 4.3.1 ist

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz \in \mathbb{N}_0$$

die Anzahl der Nullstellen (mit Multiplizität)

von f_t in B . Da aufgrund der Definition

n_t stetig von $0 \leq t \leq 1$ abhängt, folgt $n_1 = n_0$. \square

Anwendung von Satz 4.3.2 führt
auf einen einfachen Beweis der
folgenden Aussage.

Lemma 4.3.1, Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$,
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, nicht konst. mit $f'(z_0) = 0$,
 $w_0 = f(z_0)$. Dann gibt es $r > 0$ mit
 $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und $\delta > 0$ so, daß jedes
 $w \in B_\delta(w_0)$ mindestens zwei verschiedene
Urbilder $z_1, z_2 \in B_r(z_0)$ besitzt,

Bew.: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ die Ordnung der
Nullstelle z_0 der Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$.

Schreibe

$$f(z) - w_0 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$=: a_{n_0} (z - z_0)^{n_0} + \theta(z)$$

mit $a_{n_0} = f^{(n_0)}(z_0)/n_0! \neq 0$. Wähle $r > 0$

mit $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ und

$$\sup_{z \in \partial B_r(z_0)} |\theta(z)| < \frac{1}{2} |a_{n_0}| r^{n_0} =: \delta.$$

Wegen Kor. 3.4.3 können wir zudem annehmen, indem wir $r > 0$ notfalls verkleinern, daß $f'(z) \neq 0$ für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$,

Für $w \in B_\delta(w_0)$ betrachte nun

$$\bar{F}(z) = w_0 - w + a_{n_0} (z - z_0)^{n_0},$$

so daß

$$f(z) - w = \bar{F}(z) + G(z), \quad z \in B_r(z_0).$$

Nach Wahl von $r > 0$ und $\delta > 0$ gilt

$$\forall z \in \partial B_r(z_0): |\bar{F}(z)| \geq \underbrace{|a_{n_0}| r^{n_0}}_{= 2\delta} - \underbrace{|w - w_0|}_{< \delta} > \delta > |G(z)|.$$

Gemäß Satz 4.3.2 haben die Funktionen \bar{F} und $\bar{F} + G = f - w$ dieselbe Anzahl Nullstellen (mit Multiplizität) in $B_r(z_0)$, nämlich n_0 , die Anzahl Nullstellen von \bar{F} . Da $f'(z) \neq 0$ für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ sind für $w \neq w_0$ diese Nullstellen einfach; es gibt also $n_0 \geq 2$ verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_{n_0} \in B_r(z_0)$ mit $f(z_k) = w$, $1 \leq k \leq n_0$.

Kor. 4.3.1 (Offenheit holomorpher Funktionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zshg, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
holomorph und nicht konstant, $U \subset \Omega$ offen.
Dann ist $f(U)$ offen.

Bew.: Sei $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in U$.

Beh.: $f(U)$ enthält eine offene Umg. von w_0 .

Bew.: Wir unterscheiden zwei Fälle.

i) Falls $f'(z_0) = 0$, so folgt mit
Lemma 4.3.1, daß $f(U)$ eine offene
Umgebung von w_0 enthält.

ii) Falls $f'(z_0) \neq 0$, so folgt die
Behauptung aus dem Umkehrsatz, Satz 2.4.1.

□

Kor. 4.3.2 (Biholomorphiesatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph
und injektiv. Dann gilt $f'(z) \neq 0$
für jeder $z \in \Omega$, und f ist eine
biholomorphe Abbildung von Ω auf
 $\tilde{\Omega} := f(\Omega)$.

Bew.: (OBdA $\Omega \neq \emptyset$.) Da $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
injektiv, ist f nicht konstant, und
 $f'(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$ folgt mit Lemma 4.3.1.

Gemäß dem Umkehrsatz (Satz 2.4.1) ist
 f lokal biholomorph, die (aufgrund der
Injektivität von f wohldefinierte) Umkehr-
funktion $f^{-1}: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ also holomorph.

□